世界难题

3N+1猜想

邬家邦 著

湖南大学出版社

3N+1 Caixiang

3N+1 猜 想

邬家邦 著

湖南大学出版社
2001年·长沙

内 容 简 介

本书是研究3N+1猜想的一本专著.由于此猜想所涉及的函数最先是由Lothar Collatz于20世纪30年代考察过的,故又称柯雷茨(Collatz)猜想,它是像哥德巴赫(Goldbach)猜想那样既通俗易懂又迄今未能从理论上证明的迷人的数论难题.

本书先介绍3N+1猜想的由来;然后以研究此猜想时所采用的三种迭代方式(通常迭代,伸长迭代和压缩迭代)为主线重点讲述一些迷人的发现和研究成果;最后介绍3N+1猜想的推广.

本书内容深入浅出,雅俗共赏,既可作为中学生和广大数学爱好者的阅读材料,也可作为层次较高读者们的研究参考书.

图书在版编目(CIP)数据

3N+1猜想/邬家邦著.—长沙:湖南大学出版社,

2001.6

ISBN 7-81053-376-2

Ⅰ.3... Ⅱ.邬... Ⅲ.数论—普及读物

Ⅳ.0156-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第036586号

3N+1猜想

3N+1 Caixiang

邬家邦 著

□责任编辑 李立鹏 李 刚

□出版发行 湖南大学出版社

社址 长沙市岳麓山 邮码 410082

电话 0731-8821691 0731-8821315

□经 销 湖南省新华书店

□印 装 湖南航天长宇印刷有限责任公司

□开本 850×1168 1/32 □印张 6.5 □字数 170千

□版次 2001年6月第1版 □2001年6月第1次印刷

□印数 1—3 000册

□书号 ISBN 7-81053-376-2/O·26

□定价 10.00元

序

㊀ 王能超

“3N＋1之谜”的无限魅力令人陶醉.

这个谜的含义连小学生都能领会. 一个自然数 N_0 可以按下述手续加工成新的自然数 N_1: 当 N_0 为偶数时将它除以 2,反之,如果 N_0 是个奇数就将它乘以 3 再加上 1,即令

$$N_1 = \begin{cases} N_0/2, & \text{若 } N_0 \text{ 为偶数} \\ 3N_0 + 1, & \text{若 } N_0 \text{ 为奇数} \end{cases}$$

我们称这种加工手续为 **3N＋1 法则**. 这将获得的 N_1 依然是个自然数,因而可将它再依 3N＋1 法则进行加工,进一步获得新的自然数 N_2. 如此反复地做下去,即可将所给 N_0 演化成一个自然数序列

$$N_0, N_1, N_2, \cdots, N_{k-1}, N_k, \cdots$$

这种演化过程当中潜藏着什么样的规律性呢?

随意选取一个自然数——譬如数 11 进行试验. 注意到这是个奇数,将它乘以 3 再加上 1,得 34;34 是个偶数,将它除以 2 得 17;继续乘以 3 再加上 1 得 52,除 2 得 26,再除 2 得 13. 如此反复地做下去,结果生成如下自然数序列:

$$\begin{aligned} &11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 26 \\ &\to 13 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \\ &\to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1 \end{aligned}$$

这样最终获得的结果是最基本的自然数 1.

这仅仅是偶然的巧合吗?人们做了许多实验,发现都遵从这个规律. 据报道,日本学者米田信夫曾经检验过一万亿之内的所有自然数,发现 3N＋1 猜想全都成立,无一例外.

任何自然数,依 3N＋1 法则进行加工,最终都演化成自然数

1,这就是所谓 3N + 1 **猜想**.

3N + 1 猜想引起人们广泛的关注. 在小学生们看来,这是个饶有趣味的数学游戏;可在大数学家们的眼里,它却是个高难度的数学猜想,就像费马猜想、哥德巴赫猜想那样.

在最近的半个多世纪内,多少人为之绞尽脑汁,试图破解 3N + 1 之谜,但至今仍未获得令人满意的答案. 大数学家爱尔特希万般无奈地说,数学还没有成熟到足以解决这样的问题!

为什么会有这种"万数归一"的奇异现象呢?

谁都知道,任何自然数都是由单位数的 1 累加生成的,因此只要逐次减 1,总可以使它们再回归到数 1. 不过这种做法是如此地平淡,没有任何趣味可言.

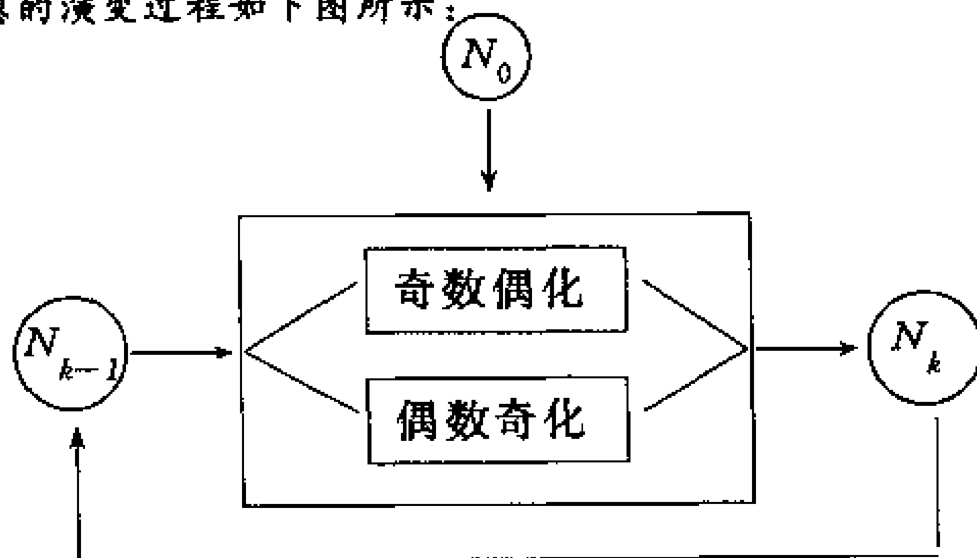
人们喜爱跌荡起伏、变幻莫测的演化过程.

设将自然数区分为奇数与偶数两大类,并采取"奇数偶化、偶数奇化"的交替转化策略:

如果所给的是个偶数,就反复地除以 2 将它转化成奇数;

如果所给的是个奇数,就乘 3 加 1 将它转化为偶数.

显然,所谓 3N + 1 法则就是这两种转化策略的综合. 3N + 1 猜想的演变过程如下图所示:



这种演化过程的最终结果会是什么呢?

由于任何自然数都是由数 1 累加生成的,因而数 1 在自然数

中占据特殊的地位，它是一切自然数的“始祖”，在这个意义上可称之为**原生数**.

我们将除1以外的所有自然数划分为奇数与偶数两大类．很明显，如果碰到奇数就化为偶数，碰到偶数就化为奇数，这样反复演化的最终结果当然既不是奇数，也不会是偶数，而只能是原生数1.

可见3N＋1猜想的提出是很自然的.

问题在于，对于任给自然数N_0，依3N＋1法则将它变成原生数1，这个加工过程一定能在有限步内完成吗？

我非常欣赏郁家邦同志的豪情壮举，他单枪匹马地向3N＋1猜想这个数学难题宣战．多年来，他不计名利，不畏艰险，孜孜不倦地从事这项探索，并已取得了一系列可喜的成绩．本书就是在总结前人和他本人研究成果的基础上写成的.

郁家邦同志之所以写这本书，其主要意图是希望向全社会宣传介绍3N＋1猜想这个数学难题，以激发人们的兴趣和热情，以鼓动更多的中国人——首先是青少年们参与这项研究．他殷切期望我国这方面的研究工作能够早日迈进国际先进行列.

衷心祝愿这个良好愿望能早日实现.

2000年10月28日

前　　言

在中国乃至世界恐怕没有别的数学难题能像哥德巴赫(Goldbach)猜想那样为数学界内外人士普遍关注.为什么这道令数学家们望而生畏的难题对界外人士也有那么大的吸引力呢?也许通俗易懂是首要原因.普通人只需知道什么是自然数和素数就可以随时进行验证.岂止是验证!不少人不管数学家发出的“骑自行车不能登上月球”的告诫,以初生牛犊不怕虎的精神孜孜求证,乐此不疲,着实令人赞佩.

我也是对这样的猜想颇感兴趣的人.不过本书向读者讲述的不是人们早已熟悉的哥德巴赫猜想,而是只需知道什么是偶数什么是奇数的人就会明白的另一个数论猜想——3N+1猜想:任给一自然数,若它是偶数,就用2除;若它是奇数,先用3乘,再加1变成偶数,再用2除.对所得结果视其是偶数还是奇数按照上法同样处理,如此经过有限多次的偶数变奇数奇数变偶数处理后,必能使所给的自然数变成1.这就是3N+1猜想(或称$3x+1$猜想,柯雷茨(Collatz)猜想).自从这个猜想提出以来,半个多世纪过去了,数学家们对它进行了深人的研究,取得了一些成果,其中包括已对至少直到10^{12}的自然数一一进行了验证而未发现例外.但理论上的证明至今未能获得,成为一道像哥德巴赫猜想那样迷人的数学难题.

本书第1节介绍3N+1猜想的由来;然后依照研究3N+1猜想时所采取的三种迭代形式即通常迭代(2节~6节)、伸长迭代(7节)、压缩迭代(8节~9节)重点讲述研究此猜想时所发现的许多奇妙有趣的现象,所取得的成果;最后讨论3N+1猜想的推广(第10节).三种迭代中所讲述的内容有相对的独立性,无因果关

系，都是新的，不是互相移植，读者不必按本书的次序阅读. 书中包含的引理、定理及推论共有 80 多个，普通读者和青年学生不要望而生畏，我在给出它们的证明时注意到了满足不同层次的读者的需要. 对暂时读不懂的内容可以只知其然而不知其所以然，甚至可以跳过，尤其对只是引用而未给出证明的引理、定理等更是如此. 这就如同 $\pi \approx 3.1416$，你承认它就行了，而不必要你去求它一样. 这就是说你读懂了大意，你就可以参加 3N + 1 猜想的研究. 而只有在研究中你才能读懂原来读不懂的东西.

自 3N + 1 猜想问世以来，国外学者已研究了好多年，并取得了一些成果，而在国内未引起足够的注意，特别是许多青年朋友可能还不知道有此迷人的猜想，这不能不令人感到遗憾. 想当年大力宣传哥德巴赫猜想在我国取得领先的研究成果时，连界外人士都普遍对该猜想着迷，但在数学界内部专心致志从事该猜想研究的人却不多. 之所以如此，也许是因为"猜想"之类的课题属于纯数学的缘故吧. 搞纯数学研究往往枯燥、单调，耗费了精力，既得不到直接经济效益又难见理论上的成果. 尤其是现在，社会热点使得人们看重应用数学而看轻纯数学和基础数学，热衷于搞纯数学的人越来越少. 我认为纯数学和应用数学是数学大厦的两大支注，好比一个人的两条腿，如果只重视、加强一条腿，而轻视、削弱另一条腿，数学科学能发展得好吗？

我写此书的一个目的对普通读者来说是为了"招兵买马"，因为我觉得本来会令众人着迷的猜想不能因为大家不知道而受到冷落，希望通过这一宣传激发人们像对待哥德巴赫猜想那样对 3N + 1 猜想及其研究的兴趣和参与意识；而对专家学者们来说则是抛砖引玉，求得高水平的理论研究在国内的出现. 专家学者们的研究需要群众基础，众星捧月.

根据国内外研究 3N + 1 猜想的进展情况，必要时也许我将会作出续写本书的打算.

我写此书时得到了博士生导师王能超教授的肯定、鼓励和帮

助，正因为如此，我为写好本书而倾注了全力．出版社的同志也对出版这样的书籍表示赞赏．作者谨向他们表示衷心的感谢！

限于作者的水平，书中的错误和不当之处在所难免，切望广大读者和专家学者们批评指正．

鄢家邦
2000 年 12 月于华中科技大学

目 次

1　3N+1猜想的由来

1.1　何谓 3N+1 猜想

众所周知，数论科学中有一个著名的“哥德巴赫(Goldbach)猜想”，或简称为“1+1”，虽然此猜想备受数学界内外人士的广泛关注和研究，但至今没有得出正确与否的结论，成为数学之谜. 除此之外，数论界还有一个更易被普通人理解和检验却同样未能从理论上证明的猜想——本书要介绍和讨论的专题——“3N+1 猜想”.

何谓 3N+1 猜想呢?

任给一自然数 n，如果 n 是偶数，就作运算 $\frac{n}{2}$；如果 n 是奇数，则先作运算 $3n+1$，再以 2 除. 然后将所得的数视其是偶数还是奇数再作如上所说的处理，如此继续下去，问是否能经过有限次的运算将 n 变成 1?这就是**柯雷茨(Collatz)问题**，或称 **3N + 1 问题**，**$3x+1$ 问题**.

上述问题用数学语言描述就是：

对于任给 $n \in \mathrm{N}$(自然数集合)，定义数论函数 $C(n)$(称为 **Collatz 函数**或 **3N + 1 函数**)为

$$C(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2}, & \text{当 } n\equiv 0(\bmod 2) \text{ 时；}\\[2mm] \dfrac{3n+1}{2}, & \text{当 } n\equiv 1(\bmod 2) \text{ 时.}\end{cases} \tag{1.1.1}$$

依公式 $C^0(n)=n, C^k(n)=C(C^{k-1}(n))(k=1,2,\cdots)$ 进行迭代，得到 n 的**迭代序列**，也称 n 的**轨迹序列**，记为 $T(n)$，即

$$T(n) = \{C^k(n)\}_{k=0}^{\infty}$$
$$= \{C^0(n), C^1(n), C^2(n), \cdots\}. \quad (1.1.2)$$

问是否存在有限的(最小)迭代次数 k，使得 $C^k(n) = 1$?此问题提出以来虽经一些数学家的努力，但至今仍未得到“是”或“否”的答案. 认为答案为“是”，这便是**柯雷茨猜想**，或称 **3N + 1 猜想**，**3x + 1 猜想**. 此猜想是继哥德巴赫猜想之后的另一著名且有趣的数论难题.

Collatz 问题中各自然数 n 的轨迹序列(1.1.2)可形象地用有向图来表示:以 n 为图的顶点，以从 n 到 $C(n)$ 的箭头表示有向边. 这样的有向图称为 Collatz 图或 Collatz 树，图 1.1 画出了 Collatz 树的一部分. 若 Collatz 猜想正确，则所有的自然数 n 都各自从它所在的顶点出发，沿各自的迭代轨迹运动而最终汇合到 1，形成“落叶归根(1)”之势;或说最终在 1 与 2 之间永远跳动下去(因为 1 的迭代轨迹是圈(1,2,1)). 例如，从图 1.1 看出 7 的迭代轨迹是

$$T(7) = \{C^0(7), C^1(7), C^2(7), \cdots\}$$
$$= \{7,11,17,26,13,20,10,5,8,4,2,1,2,1,\cdots\}. \quad (1.1.3)$$

1.2 3N+1 猜想的由来

3N+1 猜想之所以又称为 Collatz 猜想是因为它与德国汉堡大学应用数学研究所的 Lothar Collatz 教授有密切关系. 它的提出经历了一个过程. 早在 1928 年～1933 年当 L. Collatz 还是汉堡大学的一个学生的时候，由于受到他的老师 Edmund Landau，Oscar Perron 等人讲课的启发，他对数论函数，图论等产生了浓厚的兴趣. 数论与图论之间，有着密切的联系，其中之一是可将数论函数 $f(n)$ 与有向图结合起来:取整数 n 作为图的顶点，用一带箭头的线段将 n 与 $f(n)$ 连结起来. 当时 L. Collatz 画了许多关于数论函数的有向图，并作了如下分类:

(1)单值函数

图 1.1 Collatz 树

a)有向图只需画在一根直线上.

例如 $f(n)=n+1$(图 1.2).



图 1.2

b)有向图为树.

例如 $f(n)=n-g(n)$，其中 $g(n)$ 是除去 n 本身的 n 的最大因数. 例如 $f(21)=21-7=14$. 若 p 是素数，则 $f(p)=p-1$. 图 1.3 画出了该树的一部分.

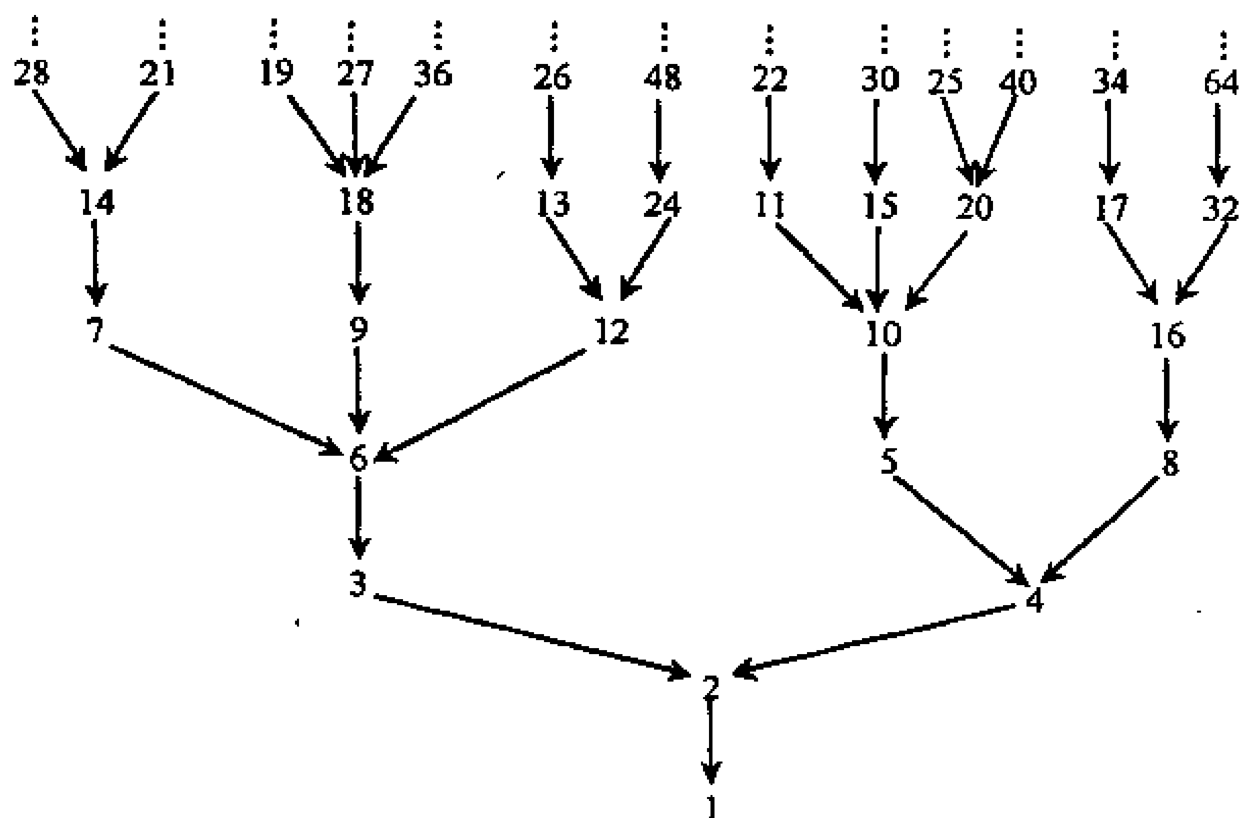


图 1.3

c)有向图为森林.

图由 $k(\geqslant 2)$ 棵互不连通的树构成. 例如 $f(n)=n+n^2$(图 1.4).

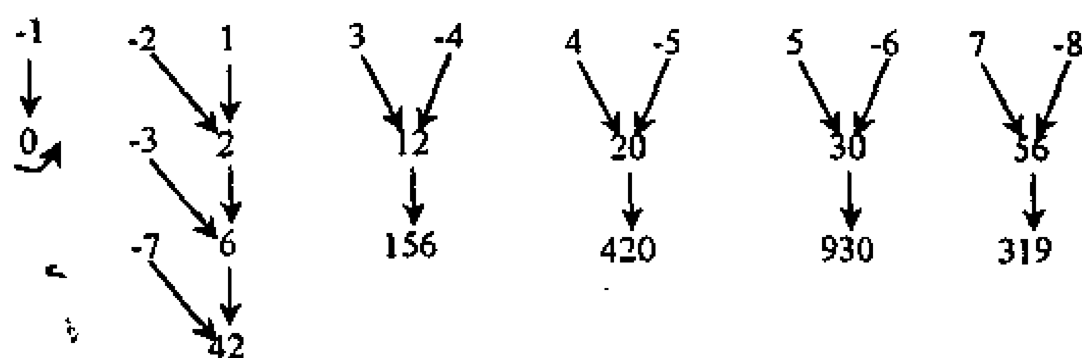


图 1.4

d)有向图中含有定点.

若 $f(n_0)=n_0$,则称点 n_0 为 $f(n)$ 的一个定点. 例如图 1.4 中 $n_0=0$ 就是 $f(n)=n+n^2$ 的一个定点. 又如 $f(n)=\frac{1}{2}(n^2-9n)+9$,包含两个定点 $n_1=2$ 和 $n_2=9$. 含有两个以上定点的有向图是不连通的.

e)有向图中含有圈. 圈中所含整数的个数 $s(2\leqslant s\leqslant$ 某常数)称为圈的长."圈"通常是指有限长度的圈. 例如对 $n>1$,令

$$f(n)=\begin{cases}3n,\text{当 } n \text{ 为素数时};\\ n \text{ 的纯因数的和,当 } n \text{ 不为素数时}.\end{cases}$$

其中 n 的"纯因数"是指 n 的除 n 和 1 以外的因数. 有 $f(2)=6$, $f(24)=12+8+6+4+3+2=35$. $f(9)=3$. $f(n)$ 的有向图中含有多个圈(图 1.5)

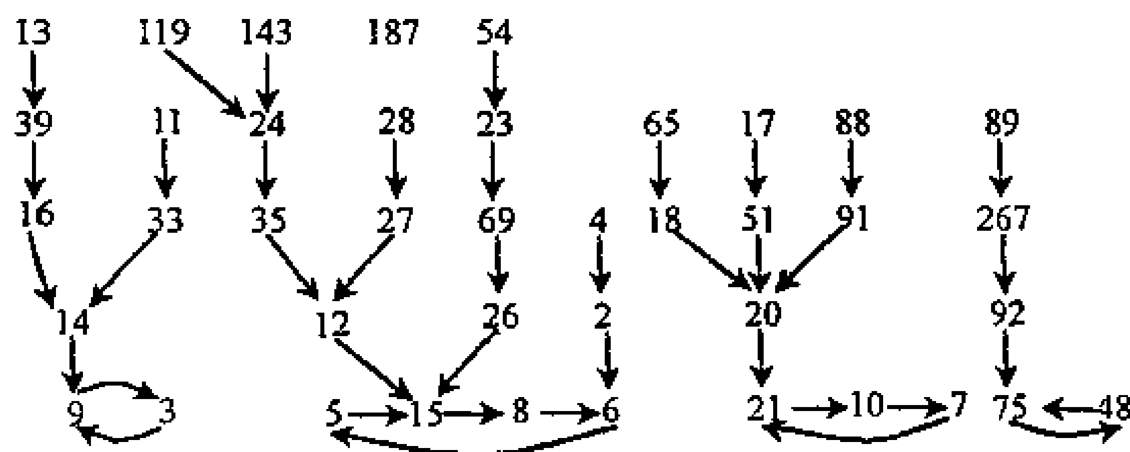


图 1.5

(2) 多值函数

情况比单值函数复杂，画图时可用“超图”表示函数.

例 1 若 n 可表为 $n=a\cdot b$ 的形式，这里 $1<a<b$，定义 $f(n)=b^2-a^2$，则 $f(n)$ 可能是多值函数. 如 $n=36=2\cdot 18=3\cdot 12=4\cdot 9$，而 $f(36)$ 有三个值：$18^2-2^2=320, 12^2-3^2=135, 9^2-4^2=65$. 图1.6表示了 $f(n)$ 的一小部分图形，在每一条边上标出对应的因素乘积 $b\cdot a$ 该图包含圈(231，320,144,260,231).

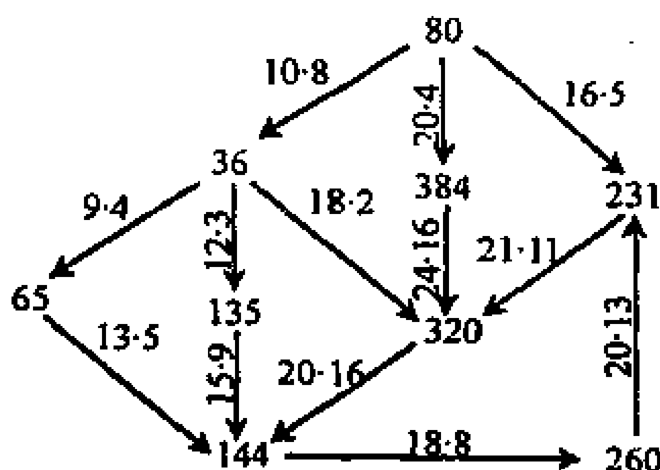


图 1.6

例 2 整数因子分解的超图. 对每一整数 n, $f(n)$ 表示具有形式 $n=u\cdot v$ 的所有整数对 (u,v)，这时“函数值” $f(n)$ 已不是一般的数值了.

L. Collatz 于1932年7月1日在他的笔记本中曾记述了如下的一个数论函数：

$$G(n)=\begin{cases}2n/3, & \text{当 } n\equiv 0(\bmod 3) \text{ 时；}\\(4n-1)/3, & \text{当 } n\equiv 1(\bmod 3) \text{ 时；}\\(4n+1)/3, & \text{当 } n\equiv 2(\bmod 3) \text{ 时.}\end{cases}$$

这回他没有把 $G(n)$ 用有向图形象地描绘，而代之以用置换

$$P=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \cdots\\1 & 3 & 2 & 5 & 7 & 4 & 9 & 11 & 6 & \cdots\end{pmatrix}$$

的形式来表示. 不过从所列数值容易看出置换 P 中有一个定点，两个圈.

L. Collatz 提到关于研究上述 P 的圈结构问题，特别问及包

含数值 8 的置换圈是有限的还是无限的，即依公式 $G^0(n) = n$，$G^k(n) = G(G^{k-1}(n))$ $(k = 1,2,\cdots)$，取 $n = 8$ 进行迭代，问 $G^k(8)$ 是有界还是无界？他提出的这个问题后来被有的学者称为原始的 Collatz 问题.

1950 年在美国麻省州的 Cambridge 举行的国际数学家代表大会上，L. Collatz 首次将他的问题传播给与会的同行们. 但自那时以来半个世纪过去了，$G^k(8)$ 是否有界的问题还无定论，但数学家们普遍相信 $G^k(8)$ 是无界的，即包含 8 的有限长的圈不存在. 从置换 P 看出，当 $n = 1,2,3,4,5,6,7,9$ 时 $G^k(n) \leqslant 9$，有界. 但考察 $G^k(8)$ 问题就难了. 笔者在研究中计算了数百个 $G^k(8)$ 的值，发现 $G^k(8)$ 随 k 的增加而增加，没有有限圈，故笔者也相信：$G^k(8)$ 是无界的，即 $G^k(8) \to \infty$（当 $k \to \infty$）. 不仅如此，笔者还对大于 9 的一些自然数作了一些迭代计算，发现结果与 $G^k(8)$ 类似.

L. Collatz 在构造数论函数 $f(n)$ 时常发现圈结构现象，这引起了他极大的兴趣，促使他进一步考虑：如何构造一个既简单又可能出现圈结构以自然数 n 为自变量的数论函数 $f(n)$？结论是：迭代时若 $f(n)$ 的值为常数或单调增或单调减都不可能出现圈，只有在迭代中 $f(n)$ 的值时大时小才有可能出现圈结构. 于是他找到了前面介绍的(1.1.1)式所表示的函数，也就是被我们称为 Collatz 函数的函数 $C(n)$.

事实上，此函数确实有圈(1,2,1). 当时由于计算工具的限制，L. Collatz 仅对一些比较小的自然数进行验证，结果惊奇地发现这些自然数每个都无一例外地最终进入圈(1,2,1). 于是猜测：对每一个自然数 n，依公式 $C^0(n) = n, C^k(n) = C(C^{k-1}(n)$ $(k = 1, 2,\cdots)$ 进行迭代，必存在有限的迭代次数 $k(n)$，使得 $C^k(n) = 1$. 就是他的这个猜测后来被数学界称为 Collatz 猜想（或 3N＋1 猜想，3x＋1 猜想）.

以上介绍的是 3N＋1 猜想的大致形成过程. 这一形成过程清楚地说明：3N＋1 猜想同其它许多猜想一样不是突然从天上掉下

来的，而是人们在实践中多观察、多分析、多思考、多积累的结果．而要使一个猜想迷倒众人，则需要它简单、易懂、便于检验．3N+1猜想正是具备这样的特点．

当年L. Collatz考虑到不能解决他所提出的问题，所以并没有发表他的猜想，只是在许多会议上和演讲中提到这个问题．1952年当他来到汉堡时，他将此猜想告诉了他的同事Helmut Hasse教授，引起了H. Hasse极大兴趣，并在其它城市讲学时传播这一猜想．还有其他许多知名学者如S. Kakutani和S. Ulam等人知道这一猜想后，也产生了浓厚的兴趣并积极传播，于是很快使得了解这一猜想的人越来越多．3N+1猜想在传播过程中也曾被人们称为Hasse算法，Kakutani问题和Ulam问题．

获悉这一猜想后，对此猜想感兴趣的人们开始的反应自然是用数去检验，希望从中发现什么规律和性质，以便求得理论上的证明，或者希望找到反例来证明猜想的错误．自3N+1猜想传播开来，到现在半个世纪过去了，数学家们进行不少研究，其中包括用数进行检验，特别是借助现代计算机检验了至少直到$2^{40}\approx 1.1\times 10^{12}$的数，发现全都符合猜想，没有一个反例，但又未能从理论上找到证明此猜想的方法，使得此猜想越来越迷人，越来越引起更多人的关注．

这里需要强调的是，验证不等于证明，来发现反例不等于没有反例．自然数是不能穷尽的，容量再大的计算机也无法对所有自然数进行穷举，2^{40}个自然数只不过是全体自然数中的沧海一粟．找出反例否定猜想是有先例的，数论中就有这样的例子．例如，设$\pi_i(x)(i=1,2)$表示素数p的个数，这里$p\leqslant x$，且$p\equiv i(\mathrm{mod}3)$．人们经过大量验证后，曾经猜想：对任何$x\geqslant 2$，函数$f(x)=\pi_2(x)-\pi_1(x)>0$．后来有人终于发现当$x=608,981,813,029$时$f(x)<0$，并且进一步的研究表明随着x的增加，$f(x)$的符号将改变无穷多次，猜想因此被否定．又例如，也是通过大

量验证，得知当 $3 \leqslant x \leqslant 10^{12}$ 时，$f(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} - \pi(x) > 0$. 人们据此猜想：对任何 $x \geqslant 3$，有 $f(x) > 0$. 殊不知这一猜想又错了！因为当 $x = 1.65 \times 10^{1165}$ 时，$f(x) < 0$，并且进一步的研究得到 Littlewood 定理：$\int_2^x \frac{1}{\ln t}\mathrm{d}t - \pi(x)$ 改变符号无穷多次，猜想因此被彻底否定.

以上是用举反例的方法来否定猜想的例子. 但如果某猜想本来就成立，而想通过举反例来否定就是徒劳的了，只能想办法从理论上进行证明. 比如图论中的"四色猜想"就是正确的，当然找不到什么"反例"来否定，而只能想法从理论上进行证明. 为此数学家们将问题归结为对某些"构件"的穷举，借助现代高速计算机在几千个小时内完成了证明.

对哥德巴赫猜想，人们的关注程度和研究投人可能远比上述及其它许多猜想都大，但此猜想正确与否至今仍悬而未决，究其原因，可能与素数的分布杂乱无章这一特点有很大关系. 前面提及的两个函数的符号为什么会随 x 的无限增大而改变无限多次呢？也许是因为这两个函数都包含有与素数分布有关的函数 $\pi(x)$ 的缘故吧.

对柯雷茨猜想而言，虽不涉及到素数的特点，只涉及奇数与偶数，但无论奇数或偶数，它们的迭代序列 $T(n)$ 中的元素正像素数的分布那样杂乱无章，无规律可言；并且有时在求 $T(n)$ 时会出现比 n 大得多的数. 比如从(1.1.3)式看出求 $T(7)$ 时会出现数 $3 \times 17 + 1 = 52$，比 7 大得多. 又如若取 $n = 8,528,817,511 < 1.1 \times 10^{12}$，即此 n 处在人们已经验证了的数值范围内，并且还算是比较小的，但在求 $T(n)$ 时要碰到比 1.1×10^{12} 大得多的数 18,144,594,937,356,598,024. 若要在更大的范围内验证猜想，其难度可见一斑.

综上所述，似乎可以断言：柯雷茨猜想与哥德巴赫猜想是属于同等难度的数论难题.

下面的内容将介绍人们在研究柯雷茨猜想的过程中所发现的一些奇特现象，所采取的一些方法和所取得的一些成果.

附注 3N+1 猜想除了 L. Collatz 猜想这个通常的别称外，在它早期的形成和传播过程中，还曾冠以其他的人名成地名. 比如，与 L. Ccollatz 学习和工作在同一大学的 H. Hasse，不仅对 3N+1 猜想感兴趣，还常和一些人研讨该猜想的推广，创立了一个以他的名字命名的算法. 再比如，20 世纪 50 年代，Hasse 在一次访问 Syracuse 大学时，不忘以猜想交友，一时间，3N+1 猜想被人们称为 Syracuse 问题. 自那以后，3N+1 猜想还先后曾被称为 Kakutani 问题、Ulam 问题等等，同样是由于人们热衷于传播、热衷于研究的结果. 3N+1 猜想为什么会这样迷人? 我想答案就在于它同哥德巴赫猜想一样，一方面简单得让低年级小学生都十分明白其内容，而另一方面却难证得让大科学家茫然不知所措. 我之所以写此书，正是由于兴趣和茫然所致也.

在 3N+1 猜想的研究者中，有一位至少是我认为最热心、最积极、最投入的科学家，他就是 J. L. Lagarias. 1985 年他在美国数学月刊上发表了一篇题为"3X+1 问题及其推广"的长篇论文(即本书参考文献中的第一篇). 该文详细地介绍了 3N+1 猜想的由来;简要而系统地总结了几十年来人们研究 3N+1 猜想所取得的成果;引人人胜地介绍了 3N+1 猜想的推广思路. 该论文发表之后，后面撰写这方面论文的作者都不约而同地要引用他的这篇文章，足见这篇文章的重要性和权威性. 笔者学着研究 3N+1 猜想，当然要以他为师，反复拜读他的文章而爱不释手. 尽管如此，也只能略知一二，写出这本小书只是作为引玉之砖.

2 自然数与奇偶矢量的对应

2.1 数集与奇偶矢量集间的一一映射

设自然数 n 的轨迹序列为

$$T(n)=\{C^0(n), C^1(n), C^2(n), \cdots, C^i(n), \cdots\}$$
$$=\{n_0, n_1, n_2, \cdots, n_i, \cdots\}. \qquad (2.1.1)$$

对 $i=0, 1, 2, \cdots$ 令

$$x_i(n)=\begin{cases}0, & 当\ n_i \equiv 0(\mathrm{mod}2)\ 时; \\ 1, & 当\ n_i \equiv 1(\mathrm{mod}2)\ 时,\end{cases} \qquad (2.1.2)$$

得矢量

$$v(n)=\{x_0(n), x_1(n), x_2(n), \cdots, x_i(n), \cdots\}, \qquad (2.1.3)$$

称为 n 的奇偶矢量;而矢量

$$v_i(n)=\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}\} \qquad (2.1.4)$$

称为 n 的长为 i 的子奇偶矢量. 如:

$$T(7)=\{7, 11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1, 2, 1, \cdots\}, \qquad (2.1.5)$$

$$v(7)=\{1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, \cdots\}, \qquad (2.1.6)$$

$$v_{12}(7)=\{1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1\}, \qquad (2.1.7)$$

3N + 1 猜想可等价地用轨迹序列或奇偶矢量来描述:

3N + 1 猜想的等价命题 2.1 以下两命题都与 3N + 1 猜想等价:

(1) 每个自然数的轨迹序列都以唯一的圈(1, 2, 1)结束.

(2) 每个自然数的奇偶矢量都以唯一的圈(1, 0, 1)结束.

显然，任意给定一个自然数n以后，由于它的轨迹序列(2.1.1)是唯一确定的，因而它的奇偶矢量(2.1.3)也是唯一确定的. 反过来问:若任意给定一个奇偶矢量

$$\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots\}, \tag{2.1.8}$$

它一定是某个自然数n的奇偶矢量吗？回答是肯定的. 下面就来讨论这个问题.

先看以下的定理和推论：

定理 2.1 设$n' = n + r \cdot 2^k (n, k, r \in \mathrm{N})$，则$v_k(n) = v_k(n')$

证 记

$$T(n) = \{n_0, n_1, n_2, \cdots\},$$
$$T(n') = \{n'_0, n'_1, n'_2, \cdots\},$$
$$v_k(n) = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}\},$$
$$v_k(n') = \{x'_0, x'_1, x'_2, \cdots, x'_{k-1}\}.$$
$$s_i = s_i(n) = \begin{cases} 0, & \text{当 } i = 0 \text{ 时}, \\ \sum_{j=0}^{i-1} x_j & \text{当 } i = 1, 2, \cdots \text{ 时}. \end{cases}$$

即证

$$x'_i = x_i (i = 0, 1, 2, \cdots, k-1). \tag{2.1.9}$$

因为$n_0 = n$，$n'_0 = n'$，$s_0 = 0$，所以条件$n' = n + r \cdot 2^k$就是

$$n'_0 = n_0 + r \cdot 3^{s_0} \cdot 2^k, \tag{2.1.10}$$

故有

$$x'_0 = x_0. \tag{2.1.11}$$

利用(2.1.10)式和(2.1.11)式，由

$$n_1 = \begin{cases} \dfrac{n_0}{2}, \text{ 当 } n_0 \equiv 0(\mathrm{mod}2) \text{ 时}, \\ \dfrac{3n_0 + 1}{2}, \text{ 当 } n_0 \equiv 1(\mathrm{mod}2) \text{ 时}. \end{cases}$$

和

$$n'_1=\begin{cases}\dfrac{n'_0}{2}=\dfrac{n_0}{2}+r\cdot 2^{k-1}, \text{ 当 } n'_0\equiv 0(\bmod 2) \text{ 时}, \\ \dfrac{3n'_0+1}{2}=\dfrac{3n_0+1}{2}+r\cdot 3\cdot 2^{k-1}, \\ \qquad \text{当 } n'_0\equiv 1(\bmod 2) \text{ 时}.\end{cases}$$

可得

$$n'_1=n_1+r\cdot 3^{s_1}\cdot 2^{k-1}, \tag{2.1.12}$$

故有

$$x'_1=x_1. \tag{2.1.13}$$

同理利用(2.1.12)式和(2.1.13)式，由

$$n_2=\begin{cases}\dfrac{n_1}{2}, \text{ 当 } n_1\equiv 0(\bmod 2) \text{ 时}, \\ \dfrac{3n_1+1}{2}, \text{ 当 } n_1\equiv 1(\bmod 2) \text{ 时}.\end{cases}$$

和

$$n'_2=\begin{cases}\dfrac{n'_1}{2}=\dfrac{n_1}{2}+r\cdot 3^{s_1}\cdot 2^{k-2}, \text{ 当 } n'_1\equiv 0(\bmod 2) \text{ 时}, \\ \dfrac{3n'_1+1}{2}=\dfrac{3n_1+1}{2}+r\cdot 3^{s_2}\cdot 2^{k-2}, \\ \qquad \text{当 } n'_1\equiv 1(\bmod 2) \text{ 时}.\end{cases}$$

可得

$$n'_2=n_2+r\cdot 3^{s_2}\cdot 2^{k-2}, \tag{2.1.14}$$

故有

$$x'_2=x_2. \tag{2.1.15}$$

$$\cdots$$

可得

$$n'_{k-2}=n_{k-2}+r\cdot 3^{s_{k-2}}\cdot 2^2, \tag{2.1.16}$$

故有

$$x'_{k-2}=x_{k-2}. \tag{2.1.17}$$

利用(2.1.16)式和(2.1.17)式，由

$$n_{k-1}=\begin{cases}\dfrac{n_{k-2}}{2}, & \text{当 } n_{k-2}\equiv 0(\bmod 2)\text{ 时},\\[2ex] \dfrac{3n_{k-2}+1}{2}, & \text{当 } n_{k-2}\equiv 1(\bmod 2)\text{ 时}.\end{cases}$$

和

$$n'_{k-1}=\begin{cases}\dfrac{n'_{k-2}}{2}=\dfrac{n_{k-2}}{2}+r\cdot 3^{s_{k-2}}\cdot 2, & \text{当 } n'_{k-2}\equiv 0(\bmod 2)\text{ 时},\\[2ex] \dfrac{3n'_{k-2}+1}{2}=\dfrac{3n_{k-2}+1}{2}+r\cdot 3^{s_{k-1}}\cdot 2, & \\ \qquad\qquad \text{当 } n'_{k-2}\equiv 1(\bmod 2)\text{ 时}.\end{cases}$$

可得

$$n'_{k-1}=n_{k-1}+r\cdot 3^{s_{k-1}}\cdot 2, \tag{2.1.18}$$

故有

$$x'_{k-1}=x_{k-1}. \tag{2.1.19}$$

利用(2.1.18)式和(2.1.19)式，由

$$n_{k}=\begin{cases}\dfrac{n_{k-1}}{2}, & \text{当 } n_{k-1}\equiv 0(\bmod 2)\text{ 时},\\[2ex] \dfrac{3n_{k-1}+1}{2}, & \text{当 } n_{k-1}\equiv 1(\bmod 2)\text{ 时}.\end{cases}$$

和

$$n'_{k}=\begin{cases}\dfrac{n'_{k-1}}{2}=\dfrac{n_{k-1}}{2}+r\cdot 3^{s_{k-1}}, & \text{当 } n'_{k-1}\equiv 0(\bmod 2)\text{ 时},\\[2ex] \dfrac{3n'_{k-1}+1}{2}=\dfrac{3n_{k-1}+1}{2}+r\cdot 3^{s_{k}}, & \\ \qquad\qquad \text{当 } n'_{k-1}\equiv 1(\bmod 2)\text{ 时}.\end{cases}$$

可得

$$n'_{k}=n_{k}+r\cdot 3^{s_{k}}. \tag{2.1.20}$$

综合(2.1.11)式和(2.1.13)式、…(2.1.19)式即得(2.1.9)式，定理得证.

推论 2.1 设 $n' = n + r \cdot 2^k (n, k, r \in \mathbf{N})$，则当 r 为偶数时，$x'_k = x_k$；当 r 为奇数时，$x'_k$ 与 x_k 取值相异.

证 此推论可由(2.1.20)式得到.

设 $\nu = \{x_0, x_1, x_2, \cdots\}$ 表示任一奇偶矢量；$\nu_k = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}\}$ 表示 ν 的长为 k 的子奇偶矢量；V_k 表示所有 ν_k 的集合；$M_k = \{1, 2, 3, \cdots, 2^k\}$. 则有以下定理 2.2：

定理 2.2 对任何 $k \in \mathbf{N}$，在 M_k 与 V_k 之间可建立一一映射 $\sigma_k : M_k \to V_k$.

证 任取 $n \in M_k$，定义映射 $\sigma_k : n \to \nu_k(n)$. 现对 k 用归纳法证明 σ_k 是 $M_k \to V_k$ 的一一映射.

1) 首先，当 $k = 1$ 时，映射

$$1 \to \nu_1(1) = \{1\},$$

$$2 \to \nu_1(2) = \{0\}.$$

显然是一一映射 $\sigma_1 : M_1 \to V_1$；

当 $k = 2$ 时，映射

$$1 \to \nu_2(1) = \{1, 0\},$$

$$2 \to \nu_2(2) = \{0, 1\},$$

$$3 \to \nu_2(3) = \{1, 1\},$$

$$4 \to \nu_2(4) = \{0, 0\}.$$

显然也是一一映射 $\sigma_2 : M_2 \to V_2$.

2) 其次，假设当 $k = i$ 时，映射

$$\begin{aligned} 1 &\to \nu_i(1) = \{x_0^{(1)}, x_1^{(1)}, \cdots, x_{i-1}^{(1)}\}, \\ 2 &\to \nu_i(2) = \{x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, \cdots, x_{i-1}^{(2)}\}, \\ &\cdots \\ 2^i &\to \nu_i(2^i) = \{x_0^{(2^i)}, x_1^{(2^i)}, \cdots, x_{i-1}^{(2^i)}\}. \end{aligned} \tag{2.1.21}$$

是一一映射 $\sigma_i : M_i \to V_i$. 下证映射

$$1 \to v_{i+1}(1) = \{x_0^{(1)}, x_1^{(1)}, \cdots, x_{i-1}^{(1)}, x_i^{(1)}\},$$
$$2 \to v_{i+1}(2) = \{x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, \cdots, x_{i-1}^{(2)}, x_i^{(2)}\},$$
$$\cdots$$
$$2^i \to v_{i+1}(2^i) = \{x_0^{(2^i)}, x_1^{(2^i)}, \cdots, x_{i-1}^{(2^i)}, x_i^{(2^i)}\},$$
$$2^i + 1 \to v_{i+1}(2^i + 1) = \{x_0^{(2^i+1)}, x_1^{(2^i+1)}, \cdots, x_{i-1}^{(2^i+1)}, x_i^{(2^i+1)}\},$$
$$2^i + 2 \to v_{i+1}(2^i + 2) = \{x_0^{(2^i+2)}, x_1^{(2^i+2)}, \cdots, x_{i-1}^{(2^i+2)}, x_i^{(2^i+2)}\},$$
$$\cdots$$
$$2^{i+1} \to v_{i+1}(2^{i+1}) = \{x_0^{(2^{i+1})}, x_1^{(2^{i+1})}, \cdots, x_{i-1}^{(2^{i+1})}, x_i^{(2^{i+1})}\}. \tag{2.1.22}$$

也是一一映射 $\sigma_{i+1}: M_{i+1} \to V_{i+1}$. 为此只需证明(2.1.22)式的诸子奇偶矢量互不相同即可.

1° 由归纳法假设知(2.1.21)式的 2^i 个子奇偶矢量 $v_i(1)$, $v_i(2)$, …, $v_i(2^i)$ 互不相同，因而(2.1.22)式的前 2^i 个子奇偶矢量 $v_{i+1}(1)$, $v_{i+1}(2)$, …, $v_{i+1}(2^i)$ 也互不相同；

2° 由 1° 并利用定理 2.1(取 $r = 1$) 可知，(2.1.22)式的后 2^i 个子奇偶矢量 $v_{i+1}(2^i + 1)$, $v_{i+1}(2^i + 2)$, …, $v_{i+1}(2^{i+1})$ 也互不相同；

3° 任取 $n \in M_i = \{1, 2, \cdots, 2^i\}$，则 $v_{i+1}(n) = \{x_0, x_1, \cdots, x_i\}$ 属于(2.22)式的前 2^i 个子奇偶矢量之列. 再任取 $n' \in \{2^i + 1, 2^i + 2, \cdots, 2^{i+1}\}$，则 $v_{i+1}(n') = \{x'_0, x'_1, \cdots, x'_i\}$ 属于(2.1.22)式的后 2^i 个子奇偶矢量之列. 这时，① 若 $n' = n + 2^i$，则由推论 2.1 知 x'_i 和 x_i 取值相异，因而 $v_{i+1}(n') \neq v_{i+1}(n)$；② 若 $n' \neq n + 2^i$，则由归纳法假设及定理 2.1 也有 $v_{i+1}(n') \neq v_{i+1}(n)$. 所以(2.1.22)式的前 2^i 个子奇偶矢量的任何一个与后 2^i 个子奇偶矢量的任何一个都不相同.

综合 1°、2° 及 3° 可知，(2.1.22)式的 2^{i+1} 个子奇偶矢量 $v_{i+1}(1)$, $v_{i+1}(2)$, …, $v_{i+1}(2^{i+1})$ 是互不相同的，即(2.1.22)式所

表示的映射是一一映射 $\sigma_{i+1}:M_{i+1}\to V_{i+1}$.

由 1) 和 2)，定理 2.2 得证.

利用定理 2.2，可将有穷集合间的一一映射推广到无穷集合间的一一映射. 设 V 表示所有奇偶矢量 $\nu=\{x_0, x_1, x_2, \cdots\}$ 的集合，对任一 $n\in \mathrm{N}$，定义映射 $\sigma:n\to \nu(n)$，则此映射为 $\mathrm{N}\overset{1-1}{\to}V$. 于是有以下定理 2.3：

定理 2.3 在 N 和 V 之间可建立一一映射 $\sigma:\mathrm{N}\to V$.

2.2 由 $\nu_k(n)$ 求 n 的算法

由前面的介绍可知，对于给定的自然数 n，能容易作出 n 的奇偶矢量. 现在提出一个相反的问题：若已知 n 的长为 k 的子奇偶矢量 $\nu_k(n)$，如何求出 n 呢？为解决这样的问题，需要采用以下的算法.

算法 2.1 已知 $\nu_k(n)=\{x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}\}$ 求 n 的算法如下：

第一步 置 $b_0=d_0=0$, $c_0=1$.

第二步 对 $i=0$ 到 $k-1$，令

$$\delta_i=\begin{cases}0, & \text{当 } x_i+d_i\equiv 0(\mathrm{mod}2) \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } x_i+d_i\equiv 1(\mathrm{mod}2) \text{ 时},\end{cases}$$

$$b_{i+1}=b_i+2^i\delta_i,$$

$$c_{i+1}=3^{x_i}\cdot c_i,$$

$$d_{i+1}=\frac{1}{2}[(d_i+\delta_i c_i)\cdot 3^{x_i}+x_i].$$

第三步 $n=2^k\cdot m+b_k \quad (m=0, 1, 2, \cdots)$,

$$C^k(n)=c_k\cdot m+d_k \quad (m=0, 1, 2, \cdots).$$

例 设 $\nu_6(n)=\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}=\{0\,1\,1\,0\,1\,0\}$，求 n.

解 根据算法列出表 2.1.

表 2.1

i	x_i	b_i	c_i	d_i	$x_i + d_i$	δ_i
0	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1	1
2	1	2	3	2	3	1
3	0	6	9	8	8	0
4	1	6	9	4	5	1
5	0	22	27	20	20	0
6		22	27	10		

由算法和表 2.1 可得

$$n = 2^6 \cdot m + 22 (m = 0, 1, 2, \cdots), \qquad (2.2.18)$$

$$C^6(n) = 27 \cdot m + 10 (m = 0, 1, 2, \cdots). \qquad (2.2.19)$$

可见所求的 n 不是唯一的(因为只给出 n 的子奇偶矢量 $v_6(n)$)，这与定理 2.1 是一致的.

令 $m = 0$，得

$$n = 22;$$

$$T(22) = \{22, 11, 17, 26, 13, 20, 10, \cdots\}.$$

$$C^6(22) = 10.$$

令 $m = 1$，得

$$n = 86;$$

$$T(86) = \{86, 43, 65, 98, 49, 74, 37, \cdots\};$$

$$C^6(86) = 27 \times 1 + 10 = 37.$$

令 $m = 2$，得

$n = 150$;

$T(150) = \{150, 75, 113, 170, 85, 128, 64, \cdots\}$;

$C^6(150) = 27 \times 2 + 10 = 64.$

注意以上三数的子奇偶矢量 v_6 都相同：

$$v_6(22) = v_6(86) = v_6(150) = \{0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\}.$$

3 同高连续数对

3.1 什么是同高连续数对

众所周知，自然数中相邻二素数象 3 和 5，5 和 7，11 和 13，17 和 19 等等称为孪生素数．虽然孪生素数在自然数中所占的比例不大，也就是比较稀疏，但有无限多对．它们神出鬼没地出现在自然数中而让人称奇且难以捉摸，更加上哥德巴赫猜想可以等价地转化为用孪生素数的语言来描述，使得孪生素数备受研究者们的关注．

无独有偶，人们在研究 Collatz 猜想时发现了一个与孪生素数类似的奇特现象——同高连续数对现象，这就是本节要讨论的主题．

定义 3.1 对自然数 n，使得 $C^k(n)=1$ 的最少迭代次数 k 称为 n 的**高**（或 n 的**完全停止次数**），记为 $h(n)$（或 $t_t(n)$）；若这样的 k 不存在，则定义 $h(n)=t_t(n)=\infty$．

依定义，$h(n)$ 也等于 n 在迭代归 1 过程中用 2 除的最少次数．例如，$h(1)=0$，$h(2)=1$，$h(7)=11$，$h(11)=10$，$h(12)=h(13)=7$，$h(14)=12$，$h(40)=7$，等等．$h(n)$ 也可以从图 1.1 的 Collatz 树上的顶点 n 开始顺着有向边所指的方向往下数到 1 而得到．高相同的自然数称为**同高数**．同高数在 Collatz 树上位于同一水平线上，例如 12，13，40 就是同高数（高都是 7）．

由定义 3.1，显然有以下与 $3N+1$ 猜想等价的命题：

3N + 1 猜想的等价命题 3.1 任何自然数 n 的高 $h(n)<\infty$．

定义 3.2 如果两个相邻的自然数 n 和 $n+1$ 同高：$h(n)=h(n+1)$，即 n 和 $n+1$ 在它们各自迭代归 1 过程中用 2 除的次数相同，则 n 和 $n+1$ 称为**同高连续数对**.

这里需要指出的是，迄今为止大量的验证无一例外地表明，如果 n 和 $n+1$ 同高，则在对它们各自迭代归 1 过程中用 3 乘的次数 m 也相同，即 $m(n)=m(n+1)$. 但这一令人称奇的现象还没有获得理论上的证明.

例如，12 和 13 是自然数中第 1 个也就是数值最小的同高连续数对($h(12)=h(13)=7$, $m(12)=m(13)=2$)；14 和 15 是第 2 个同高连续数对($h=13$, $m=5$)；20 和 21 是最"矮"的同高连续数对($h=6$, $m=1$).

讲到这里读者自然要问：同高连续数对还有没有？存在有限多对还是无限多对？除了在实践中验证之外能否从理论上给出寻找同高连续数对的方法？这些问题在下面的讨论中都可以得到明确的回答.

3.2 同高连续数对族

先具体考察 12 和 13 这对最小的同高连续数对. 它们的轨迹序列(到 1 为止)分别为

$$T(12)=\{12, 6, 3, 5, 8, 4, 2, 1\},$$

和

$$T(13)=\{13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1\},$$

其轨迹序列元素的非重叠部分 12, 6, 3, 和 13, 20, 10 所对应的子奇偶矢量分别为

$$\nu_3(12)=\{0\ 0\ 1\},$$

和

$$\nu_3(13)=\{1\ 0\ 0\}.$$

注意，为简单起见，我们将 $\nu_3(12)$ 和 $\nu_3(13)$ 的元素"0"和"1"间的逗号"，"省去(下同).

针对子奇偶矢量{0 0 1}，由算法 2.1 可求得与之对应的自然

数 $n=8m+4$；而针对$\{1\ 0\ 0\}$可求得自然数 $n'=8m+5=n+1$. n 和 n' 相邻，且有

$$\nu_3(n)=\{0\ 0\ 1\},$$
$$\nu_3(n')=\{1\ 0\ 0\}.$$

下证 n 和 n' 同高：$h(n)=h(n')$. 由于

$$T(n)=\{8m+4,\ 4m+2,\ 2m+1,\ 3m+2,\ \cdots\},$$
$$T(n')=\{8m+5,\ 12m+8,\ 6m+4,\ 3m+2,\ \cdots\}.$$

可见

$$C^3(n)=C^3(n')=3m+2.$$
$$h(n)=h(n')=3+h(3m+2).$$

因此数对

$$\begin{cases} n=8m+4; \\ n+1=8m+5 \end{cases} \quad (m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad (3.2.1)$$

为同高连续数对. 由 $m\in\mathbf{N}$ 的任意性知(3.2.1)式的数对构成**同高连续数对族**. 如12和13，20和21，28和29，36和37，44和45等等都是该族成员. 其中当 m = 1 时的数对 12 和 13 称为**源同高连续数对**，意思是形如(3.2.1)式的同高连续数对都来源于数对 12 和 13.

尽管(3.2.1)式包含的同高连续数对有无限多，但它并没有包含所有同高连续数对，比如同高连续数对 18 和 19(h = 14，m = 6)就不在其中.

用与上而同样的方法可以作出以 18 和 19 为源同高连续数对的同高连续数对族来. 由于

$$T(18)=\{18,\ 9,\ 14,\ 7,\ 11,\ \cdots\}$$
$$T(19)=\{19,\ 29,\ 44,\ 22,\ 11,\ \cdots\}$$
$$\nu_4(18)=\{0\ 1\ 0\ 1\},$$
$$\nu_4(19)=\{1\ 1\ 0\ 0\},$$

由算法 2.1 可得

$$\nu_4(16m+2)=\{0\ 1\ 0\ 1\},$$

$$\nu_4(16m+3)=\{1\ 1\ 0\ 0\}.$$

令

$$\begin{cases} n=16m+2, \\ n+1=16m+3 \end{cases} \quad (m=1,2,\cdots), \qquad (3.2.2)$$

有

$$T\{n\}=\{16m+2,\ 8m+1,\ 12m+2,\ 6m+1,\ 9m+2,\ \cdots\},$$

$$T\{n+1\}=\{16m+3,\ 24m+5,\ 36m+8,\ 18m+4,\ 9m+2,\ \cdots\},$$

$$C^4(n)=C^4(n+1)=9m+2,$$

$$h(n)=h(n+1)=4+h(9m+2).$$

因此对任何 $m\in\mathbf{N}$，数对 16m + 2 和 16m + 3 为同高连续数对，如 18 和 19，34 和 35，50 和 51 等等都是，其中 18 和 19 为源同高连续数对.

然而即使有(3.2.1) 式和(3.2.2) 式两族无限多对同高连续数对，也没有包括所有的同高连续数对，例如同高连续数对 14 和 15(h = 13，m = 5)，22 和 23(h = 11，m = 4) 就不在它们之中.

为找到新的同高连续数对族，可将以上的工作继续进行下去，然后对这些个别研究结果进行分析、综合、归纳，便得到了以下重要的定理 3.1，它为寻找无穷多族同高连续数对族提供了理论依据. 为证定理 3.1，需要以下引理：

引理 3.1 (1) 若 i 为奇数，则 $3^i-1\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,4)$.

(2)若 i 为偶数，则 $3^i-1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,4)$.

此引理的证明从略.

记

$$\begin{cases} s_i=0\underbrace{1\ 1\ \cdots\ 1}_{i个1}0\ 1 \\ s'_i=1\underbrace{1\ 1\ \cdots\ 1}_{i个1}0\ 0 \end{cases} \qquad (i=0,1,2,\cdots)$$

并称序列 s_i 和 s'_i 是一对**母体**. 例如 $\nu_3(12)=\{0\ 0\ 1\}=\{s_0\}$，

$\nu_3(13) = \{1\ 0\ 0\} = \{s'_0\}$.

定理 3.1 数对

$$\begin{cases} n = 2^{i+3} \cdot m + 2^{i+2} + (-1)^i \cdot 2^{i+1} - 2 \\ n + 1 = 2^{i+3} \cdot m + 2^{i+2} + (-1)^i \cdot 2^{i+1} - 1 \end{cases} \tag{3.2.3}$$

$$(i = 0, 1, 2, \cdots; m = 0, 1, 2, \cdots)$$

的长为 $i + 3$ 的子奇偶矢量对的形式是

$$\begin{cases} \nu_{i+3}(n) = \{0\ \underbrace{1\ 1\ \cdots\ 1}_{i个1}\ 0\ 1\} = \{s_i\}, \\ \nu_{i+3}(n+1) = \{1\ \underbrace{1\ 1\ \cdots\ 1}_{i个1}\ 0\ 0\} = \{s'_i\}. \end{cases} \tag{3.2.4}$$

又当 $n \geqslant 12$ 时，n 和 $n + 1$ 是同高连续数对，且

$$h(n) = h(n+1) = i + 3 + h(M_1), \tag{3.2.5}$$

其中 $M_1 = 3^{i+1} \cdot m + \frac{1}{4}[2 \cdot 3^{i+1} + (-1)^i \cdot 3^{i+1} - 1]$.

证 设(3.2.3)式 n 和 $n + 1$ 的长为 $i + 3$ 的子奇偶矢量对是

$$\begin{cases} \nu_{i+3}(n) = \{x_0(n), x_1(n), x_2(n), \cdots, x_{i+2}(n)\}, \\ \nu_{i+3}(n+1) = \{x_0(n+1), x_1(n+1), \cdots, x_{i+2}(n+1)\}. \end{cases} \tag{3.2.6}$$

显然有

$$x_0(n) = 0, \ x_0(n+1) = 1. \tag{3.2.7}$$

对(3.2.3)式的 n 和 $n + 1$ 分别用函数 $C(n)$ 进行迭代，得到：

$$C^1(n) = 2^{i+2} \cdot m + 2^{i+1} + (-1)^i \cdot 2^i - 1,$$

$$C^1(n+1) = 3 \cdot 2^{i+2} \cdot m + 3 \cdot 2^{i+1} + (-1)^i \cdot 3 \cdot 2^i - 1,$$

$$x_1(n) = x_1(n+1) = 1. \tag{3.2.8}$$

$$C^2(n) = 3 \cdot 2^{i+1} \cdot m + 3 \cdot 2^i + (-1)^i \cdot 3 \cdot 2^{i-1} - 1,$$

$$C^2(n+1) = 3^2 \cdot 2^{i+1} \cdot m + 3^2 \cdot 2^i + (-1)^i \cdot 3^2 \cdot 2^{i-1} - 1,$$

$$x_2(n) = x_2(n+1) = 1. \tag{3.2.9}$$

$\cdots$

$$C^i(n) = 3^{i-1} \cdot 2^3 \cdot m + 3^{i-1} \cdot 2^2 + (-1)^i \cdot 3^{i-1} \cdot 2 - 1,$$

$$C^i(n+1) = 3^i \cdot 2^3 \cdot m + 3^i \cdot 2^2 + (-1)^i \cdot 3^i \cdot 2 - 1,$$

$$x_i(n) = x_i(n+1) = 1. \tag{3.2.10}$$

$$C^{i+1}(n) = 3^i \cdot 2^2 \cdot m + 3^i \cdot 2 + (-1)^i \cdot 3^i - 1,$$

$$C^{i+1}(n+1) = 3^{i+1} \cdot 2^2 \cdot m + 3^{i+1} \cdot 2 + (-1)^i \cdot 3^{i+1} - 1,$$

$$x_{i+1}(n) = x_{i+1}(n+1) = 0. \tag{3.2.11}$$

$$C^{i+2}(n) = 3^i \cdot 2 \cdot m + \frac{1}{2}[2 \cdot 3^i + (-1)^i \cdot 3^i - 1],$$

$$C^{i+2}(n+1) = 3^{i+1} \cdot 2 \cdot m + \frac{1}{2}[2 \cdot 3^{i+1} + (-1)^i \cdot 3^{i+1} - 1],$$

$$x_{i+2}(n) = 1(\text{由引理 } 3.1(1)), \tag{3.2.12}$$

$$x_{i+2}(n+1) = 0(\text{由引理 } 3.1(2)). \tag{3.2.13}$$

$$C^{i+3}(n) = 3^{i+1} \cdot m + \frac{1}{4}[2 \cdot 3^{i+1} + (-1)^i \cdot 3^{i+1} - 1] = M_1, \tag{3.2.14}$$

$$C^{i+3}(n+1) = 3^{i+1} \cdot m + \frac{1}{4}[2 \cdot 3^{i+1} + (-1)^i \cdot 3^{i+1} - 1] = M_1. \tag{3.2.15}$$

将(3.2.7)式、(3.2.8)式、…(3.2.13)式代人到(3.2.6)式即得(3.2.4)式. 又由(3.2.14)式和(3.2.15)式可知当$n \geqslant 12$时，n和$n+1$是同高连续数对，且(3.2.5)式成立. 定理得证.

由定理3.1可得无穷多族同高连续数对族，将其列出，如表3.1所示.

表3.1的第1行对应定理3.1中取$i=0$，同高连续数对$n=8m+4$和$n=8m+5$即(3.2.1)式的数对族，所对应的子奇偶矢量对$\{001\}=\{s_0\}$和$\{100\}=\{s'_0\}$即$v_3(n)$和$v_3(n+1)$.

注意，表3.1虽然包含了无穷多族同高连续数对族，但每族中的数对n和$n+1$例如12和13，20和21，18和19，22和23等都是先偶后奇(n为偶数，$n+1$为奇数)的，先奇后偶(n为奇数，$n+1$为偶数)的同高连续数对一对也未包括.

表 3.1　同高连续数对 n 和 $n+1$ 中的 $n(n \geqslant 12)$ 及子奇偶矢量对

i	n	n 的子奇偶矢量 $\{s_i\}$	$n+1$ 的子奇偶矢量 $\{s'_i\}$
0	$8m+4$	$\{0\ 0\ 1\} = \{s_0\}$	$\{1\ 0\ 0\} = \{s'_0\}$
1	$16m+2$	$\{0\ 1\ 0\ 1\} = \{s_1\}$	$\{1\ 1\ 0\ 0\} = \{s'_1\}$
2	$32m+22$	$\{s_2\}$	$\{s'_2\}$
3	$64m+14$	$\{s_3\}$	$\{s'_3\}$
4	$128m+94$	$\{s_4\}$	$\{s'_4\}$
5	$256m+62$	$\{s_5\}$	$\{s'_5\}$
6	$2^9 \cdot m+382$	$\{s_6\}$	$\{s'_6\}$
7	$2^{10} \cdot m+254$	$\{s_7\}$	$\{s'_7\}$
8	$2^{11} \cdot m+1534$	$\{s_8\}$	$\{s'_8\}$
9	$2^{12} \cdot m+1022$	$\{s_9\}$	$\{s'_9\}$
10	$2^{13} \cdot m+6142$	$\{s_{10}\}$	$\{s'_{10}\}$
11	$2^{14} \cdot m+4094$	$\{s_{11}\}$	$\{s'_{11}\}$
12	$2^{15} \cdot m+24574$	$\{s_{12}\}$	$\{s'_{12}\}$
13	$2^{16} \cdot m+16382$	$\{s_{13}\}$	$\{s'_{13}\}$
14	$2^{17} \cdot m+98302$	$\{s_{14}\}$	$\{s'_{14}\}$
15	$2^{18} \cdot m+65534$	$\{s_{15}\}$	$\{s'_{15}\}$
16	$2^{19} \cdot m+393214$	$\{s_{16}\}$	$\{s'_{16}\}$
17	$2^{20} \cdot m+262142$	$\{s_{17}\}$	$\{s'_{17}\}$
18	$2^{21} \cdot m+1572862$	$\{s_{18}\}$	$\{s'_{18}\}$
19	$2^{22} \cdot m+1048574$	$\{s_{19}\}$	$\{s'_{19}\}$
20	$2^{23} \cdot m+6291454$	$\{s_{20}\}$	$\{s'_{20}\}$
	…	…	…

例如数对 29 和 30($h=13$) 就是第一对先奇后偶的同高连续数对. 用与前面同样的方法可求得以它们为源同高连续数对的同高连续数对族：

$$\begin{cases} n = 128m + 29, \\ n + 1 = 128m + 30. \end{cases} \quad (m = 0, 1, 2, \cdots) \quad (3.2.16)$$

并有以下结果：

$$T(n) = \{128m + 29, 192m + 44, 96m + 22, 48m + 11, 72m + 17, 108m + 26, 54m + 13, 81m + 20, \cdots\},$$

$$T(n+1) = \{128m + 30, 64m + 15, 96m + 23, 144m + 35, 216m + 53, 324m + 80, 162m + 40, 81m + 20, \cdots\}$$

$$v_7(n) = \{1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\},$$

$$v_7(n+1) = \{0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\},$$

$$h(n) = h(n+1) = 7 + h(81m + 20).$$

通过对如此个别的先奇后偶的同高连续数对的分析，综合，归纳，可得到以下的定理：

定理 3.2 数对

$$\begin{cases} n = 2^{i+5} \cdot m + 2^{i+4} + (-1)^{i+1} \cdot 2^{i+3} - 3 \\ n + 1 = 2^{i+5} \cdot m + 2^{i+4} + (-1)^{i+1} \cdot 2^{i+3} - 2 \end{cases}$$

$$(i = 0, 1, 2, \cdots; m = 0, 1, 2, \cdots) \quad (3.2.17)$$

的长为 $i+5$ 的子奇偶矢量对的形式是

$$\begin{cases} v_{i+5}(n) = \{1\ 0\ 0\ \underbrace{1\ 1\ \cdots\ 1}_{i个1}\ 0\ 1\} = \{1\ 0 s_i\}, \\ v_{i+5}(n+1) = \{0\ 1\ 1\ \underbrace{1\ 1\ \cdots\ 1}_{i个1}\ 0\ 0\} = \{0\ 1 s'_i\}. \end{cases}$$

$$(3.2.18)$$

当 $n \geqslant 29$ 时，n 和 $n+1$ 是同高连续数对，且

$$h(n) = h(n+1) = i + 5 + h(M_2), \quad (3.2.19)$$

其中 $M_2 = 3^{i+2} \cdot m + \frac{1}{4}[2 \cdot 3^{i+2} + (-1)^{i+1} \cdot 3^{i+2} - 1]$.

证　设(3.2.17)式中的n和$n+1$的长为$i+5$的子奇偶矢量对为

$$\begin{cases} v_{i+5}(n) = \{x_0(n), x_1(n), x_2(n), \cdots, x_{i+4}(n)\}, \\ v_{i+5}(n+1) = \{x_0(n+1), x_1(n+1), \cdots, x_{i+4}(n+1)\}. \end{cases} \tag{3.2.20}$$

显然有

$$x_0(n) = 1, x_0(n+1) = 0. \tag{3.2.21}$$

对(3.2.17)式的n和$n+1$分别用函数$C(n)$进行迭代，得到：

$$C^1(n) = 3 \cdot 2^{i+4} \cdot m + 3 \cdot 2^{i+3} + (-1)^{i+1} \cdot 3 \cdot 2^{i+2} - 4,$$
$$C^1(n+1) = 2^{i+4} \cdot m + 2^{i+3} + (-1)^{i+1} \cdot 2^{i+2} - 1,$$
$$x_1(n) = 0, x_1(n+1) = 1. \tag{3.2.22}$$
$$C^2(n) = 3 \cdot 2^{i+3} \cdot m + 3 \cdot 2^{i+2} + (-1)^{i+1} \cdot 3 \cdot 2^{i+1} - 2,$$
$$C^2(n+1) = 3 \cdot 2^{i+3} \cdot m + 3 \cdot 2^{i+2} + (-1)^{i+1} \cdot 3 \cdot 2^{i+1} - 1,$$
$$x_2(n) = 0, x_2(n+1) = 1. \tag{3.2.23}$$
$$C^3(n) = 3 \cdot 2^{i+2} \cdot m + 3 \cdot 2^{i+1} + (-1)^{i+1} \cdot 3 \cdot 2^{i} - 1,$$
$$C^3(n+1) = 3^2 \cdot 2^{i+2} \cdot m + 3^2 \cdot 2^{i+1} + (-1)^{i+1} \cdot 3^2 \cdot 2^{i} - 1,$$
$$x_3(n) = x_3(n+1) = 1. \tag{3.2.24}$$
$$C^4(n) = 3^2 \cdot 2^{i+1} \cdot m + 3^2 \cdot 2^{i} + (-1)^{i+1} \cdot 3^2 \cdot 2^{i-1} - 1,$$
$$C^4(n+1) = 3^3 \cdot 2^{i+1} \cdot m + 3^3 \cdot 2^{i} + (-1)^{i+1} \cdot 3^3 \cdot 2^{i-1} - 1,$$
$$x_4(n) = x_4(n+1) = 1. \tag{3.2.25}$$

…

$$C^{i+2}(n) = 3^{i} \cdot 2^3 \cdot m + 3^{i} \cdot 3^2 + (-1)^{i+1} \cdot 3^{i} \cdot 2 - 1,$$
$$C^{i+2}(n+1) = 3^{i+1} \cdot 2^3 \cdot m + 3^{i+1} \cdot 2^2$$
$$+ (-1)^{i+1} \cdot 3^{i+1} \cdot 2 - 1,$$
$$x_{i+2}(n) = x_{i+2}(n+1) = 1. \tag{3.2.26}$$
$$C^{i+3}(n) = 3^{i+1} \cdot 2^2 \cdot m + 3^{i+1} \cdot 2 + (-1)^{i+1} \cdot 3^{i+1} - 1,$$
$$C^{i+3}(n+1) = 3^{i+2} \cdot 2^2 \cdot m + 3^{i+1} \cdot 2 + (-1)^{i+1} \cdot 3^{i+2} - 1,$$
$$x_{i+3}(n) = x_{i+3}(n+1) = 0. \tag{3.2.27}$$

$$C^{i+4}(n) = 3^{i+1} \cdot 2 \cdot m + 3^{i+1} + \frac{1}{2}[(-1)^{i+1} \cdot 3^{i+1} - 1],$$

$$C^{i+4}(n+1) = 3^{i+2} \cdot 2 \cdot m + 3^{i+2} + \frac{1}{2}[(-1)^{i+1} \cdot 3^{i+2} - 1].$$

$x_{i+4}(n) = 1$(由引理 3.1(1)), (3.2.28)

$x_{i+4}(n+1) = 0$(由引理 3.1(2)). (3.2.29)

$$C^{i+5}(n) = 3^{i+2} \cdot m + \frac{1}{4}[2 \cdot 3^{i+2} + (-1)^{i+1} \cdot 3^{i+2} - 1]$$

$$= M_2, \quad (3.2.30)$$

$$C^{i+5}(n+1) = 3^{i+2} \cdot m + \frac{1}{4}[2 \cdot 3^{i+2} + (-1)^{i+1} \cdot 3^{i+2} - 1]$$

$$= M_2. \quad (3.2.31)$$

将(3.2.21)式、(3.2.22)式、…(3.2.29)式代入(3.2.20)式即得(3.2.18)式，又由(3.2.30)和(3.2.31)式知当 $n \geqslant 29$ 时，n 和 $n+1$ 是同高连续数对，且(3.2.19)式成立. 定理得证.

由定理 3.2 可得无穷多族先奇后偶的同高连续数对族，将其列出，如表 3.2 所示.

在定理 3.2 中取 $i=2$ 得到表 3.2 的第 3 行，即(3.2.16)式的同高连续数对族及其所对应的子奇偶矢量对{10，s_2}和{01，s'_2}. 再取 $m=0$，得到该族的源同高连续数对 29 和 30.

在表 3.2，子奇偶矢量对{10，s_i}和{01，s'_i}中加在母体 s_i 和 s'_i 前面的"10"和"01"称为一对"前缀"，为醒目，将其与母体用逗号"，"分开. 而表 3.1 中的子奇偶矢量仅由母体构成.

表 3.2　同高连续数对 n 和 $n+1$ 中的 $n(n\geqslant 29)$ 及子奇偶矢量对

i	n	n 的子奇偶矢量 $\{10, s_0\}$	$n+1$ 的子奇偶矢量 $\{01, s'_i\}$
0	$32m+5$	$\{10, s_0\}$	$\{01, s'_0\}$
1	$64m+45$	$\{10, s_1\}$	$\{01, s'_1\}$
2	$128m+29$	$\{10, s_2\}$	$\{01, s'_2\}$
3	$256m+189$	$\{10, s_3\}$	$\{01, s'_3\}$
4	$512m+125$	$\{10, s_4\}$	$\{01, s'_4\}$
5	$2^{10}\cdot m+765$	$\{10, s_5\}$	$\{01, s'_5\}$
6	$2^{11}\cdot m+509$	$\{10, s_6\}$	$\{01, s'_6\}$
7	$2^{12}\cdot m+3069$	$\{10, s_7\}$	$\{01, s'_7\}$
8	$2^{13}\cdot m+2045$	$\{10, s_8\}$	$\{01, s'_8\}$
9	$2^{14}\cdot m+12285$	$\{10, s_9\}$	$\{01, s'_9\}$
10	$2^{15}\cdot m+8189$	$\{10, s_{10}\}$	$\{01, s'_{10}\}$
11	$2^{16}\cdot m+49149$	$\{10, s_{11}\}$	$\{01, s'_{11}\}$
12	$2^{17}\cdot m+32765$	$\{10, s_{12}\}$	$\{01, s'_{12}\}$
13	$2^{18}\cdot m+196605$	$\{10, s_{13}\}$	$\{01, s'_{13}\}$
14	$2^{19}\cdot m+131069$	$\{10, s_{14}\}$	$\{01, s'_{14}\}$
15	$2^{20}\cdot m+786429$	$\{10, s_{15}\}$	$\{01, s'_{15}\}$
16	$2^{21}\cdot m+524285$	$\{10, s_{16}\}$	$\{01, s'_{16}\}$
17	$2^{22}\cdot m+3145725$	$\{10, s_{17}\}$	$\{01, s'_{17}\}$
18	$2^{23}\cdot m+2097149$	$\{10, s_{18}\}$	$\{01, s'_{18}\}$
19	$2^{24}\cdot m+12582909$	$\{10, s_{19}\}$	$\{01, s'_{19}\}$
20	$2^{25}\cdot m+8388605$	$\{10, s_{20}\}$	$\{01, s'_{20}\}$
	…	…	…

3.3 同高连续数对族的其它形式

任何同高连续数对 n 和 $n+1$ 或者先偶后奇，或者先奇后偶，二者必居其一且只居其一. 那么现在要问：表 3.1 和表 3.2 是否包含了所有的同高连续数对呢？回答是否定的！研究表明，同高连续数对 n 和 $n+1$ 所对应的子奇偶矢量元素虽然有类似表 1 和表 2 那样的"前缀＋母体"的结构形式，很有规律，但这种结构形式却可以变化而得到新的同高连续数对族.

(1) **前缀对可以重复出现**

"前缀＋母体"的子奇偶矢量对的结构可以是

$$\begin{cases} \{\underbrace{10,\ 10,\ \cdots,\ 10}_{j\text{对前缀}10},\ \underbrace{0\ 1\ 1\cdots 1\ 0\ 1}_{\text{母体}s_i}\} \\ \{\underbrace{01,\ 01,\ \cdots,\ 01}_{j\text{对前缀}01},\ \underbrace{1\ 1\ 1\cdots 1\ 0\ 0}_{\text{母体}s'_i}\} \end{cases} \tag{3.3.1}$$

其中 i 与 j 各自独立地取 0，1，2，…. 即有以下定理：

定理 3.3 形如(3.3.1)式的子奇偶矢量对所对应的数对是同高连续数对.

定理 3.1 和定理 3.2 都是定理 3.3 的特殊情形，当 $j=0$ 时得到表 3.1，当 $j=1$ 时得到表 3.2. 若取 $j=2$，$i=0$，1，2，3，…，则得到新的同高连续数对族，如表 3.3 所示.

表 3.3 同高连续数对 n 和 $n+1$

n 的子奇偶矢量	$n+1$ 的子奇偶矢量	n	$n+1$
$\{1\ 0,\ 1\ 0,\ s_0\}$	$\{0\ 1,\ 0\ 1,\ s'_0\}$	$128m+49$	$128m+50$
$\{1\ 0,\ 1\ 0,\ s_1\}$	$\{0\ 1,\ 0\ 1,\ s'_1\}$	$256m+145$	$256m+146$
$\{1\ 0,\ 1\ 0,\ s_2\}$	$\{0\ 1,\ 0\ 1,\ s'_2\}$	$512m+209$	$512m+210$
$\{1\ 0,\ 1\ 0,\ s_3\}$	$\{0\ 1,\ 0\ 1,\ s'_3\}$	$1024m+593$	$1024m+594$
…	…	…	…

(2) **前缀对有多种形式**

前缀对除了 10 和 01 以外，还可以有其它形式，如 11000 和 00101 也是一对前缀．如子奇偶矢量对

$$\begin{cases}\{1\,1\,0\,0\,0,\ 0\,0\,1\}\\ \{0\,0\,1\,0\,1,\ 1\,0\,0\}\end{cases}$$

对应新的同高连续数对族：

$$\begin{cases}n = 256m + 99,\\ n + 1 = 256m + 100.\end{cases}\qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

又如子奇偶矢量对

$$\begin{cases}\{1\,1\,0\,0\,0,\ 1\,1\,0\,0\,0,\ 0\,0\,1\}\\ \{0\,0\,1\,0\,1,\ 0\,0\,1\,0\,1,\ 1\,0\,0\}\end{cases}$$

对应新的同高连续数对族：

$$\begin{cases}n = 2^{13}\cdot m + 6723,\\ n + 1 = 2^{13}\cdot m + 6724.\end{cases}\qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

(3) **不同的前缀对可以混合出现**

如子奇偶矢量对

$$\begin{cases}\{1\,1\,0\,0\,0,\ 1\,0,\ 0\,0\,1\}\\ \{0\,0\,1\,0\,1,\ 0\,1,\ 1\,0\,0\}\end{cases}$$

对应新的同高连续数对族：

$$\begin{cases}n = 1024m + 131,\\ n + 1 = 1024m + 132\end{cases}\qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots).$$

以上讨论了由前缀对 10 和 01，11000 和 00101 及它们的组合而得到同高连续数对的问题．实际上进一步的研究表明能作为前缀对的远不止 10 和 01，11000 和 00101 这两对，还有许许多多其它的前缀对类型，并且类型无穷无尽．表 3.4 列出了能作为前缀对的一部分前缀对，前面讲到的前缀对 10 和 01，11000 和 00101 包含在其中．关于表 3.4 的使用方法有以下定理：

定理 3.3 设 n 和 $n+1$ 是同高连续数对，它们对应的子奇偶矢量对是 $\{v\}$ 和 $\{v'\}$，p 为表 3.4 中第 1 列的前缀或它们的组合，

$p \leftrightarrow p'$，则 $\{pv\}$ 和 $\{p'v'\}$ 对应同高连续数对，且 $\{pv\}$ 对应的是较小的数.

例如，37 和 38 为同高连续数对，它们对应的子奇偶矢量对是 $\nu_5(37)=\{1\ 0, 0\ 0\ 1\}$ 和 $\nu_5(38)=\{0\ 1, 1\ 0\ 0\}$，取 $p=1\ 1\ 0\ 0\ 0$，$p'=0\ 0\ 1\ 0\ 1 \leftrightarrow p$，则 $\{p, 1\ 0, 0\ 0\ 1\}$ 和 $\{p', 0\ 1, 1\ 0\ 0\}$ 对应同高连续数对. 如 131 和 132 就是其中一对.

表 3.5 列出了能作为前缀对的另一些前缀对. 关于表 3.5 的使用方法有以下定理：

定理 3.4 设 n 和 $n+1$ 是同高连续数对，它们对应的子奇偶矢量对是 $\{v\}$ 和 $\{v'\}$，$\{v\}$ 的第一个数是 1，q 为表 3.5 中第 1 列的前缀或它们的组合，$q \leftrightarrow q'$，则 $\{qv'\}$ 和 $\{q'v\}$ 对应同高连续数对，且 $\{qv'\}$ 对应的是较小的数.

例如，17539 和 17540 为同高连续数对，它们对应的子奇偶矢量对是 $\nu_{10}(17539)=\{11000, 10, 001\}$ 和 $\nu_{10}(71540)=\{0\ 0\ 1\ 0\ 1, 0\ 1, 1\ 0\ 0\}$，取 $q=0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1$，$q'=1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \leftrightarrow q$，则 $\{qv'\}$ 和 $\{q'v\}$ 对应同高连续数对. 如 55430 和 55431 就是其中一对.

表 3.4 和表 3.5 可以结合起来使用，例如：

$$\begin{cases}\{\underbrace{1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0}_{p}, \underbrace{0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1}_{q}, \underbrace{0\ 0\ 1\ 0\ 1}_{p'}, \underbrace{0\ 1}_{p'}, 1\ 0\ 0\} \\ \{\underbrace{0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1}_{p'}, \underbrace{1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0}_{q'}, \underbrace{1\ 1\ 0\ 0\ 0}_{p'}, \underbrace{1\ 0}_{p}, 0\ 0\ 1\}\end{cases}$$

所对应的同高连续数对中有

$$\begin{cases}n=21\ 389\ 643, \\ n+1=21\ 389\ 644.\end{cases}$$

表 3.4　前缀 p 和 p'

前缀 p	前缀 p'
1 0	0 1
1 1 0 0 0	0 0 1 0 1
1 1 0 1 0 0 0	0 0 1 1 0 0 1
1 1 0 0 1 0 0 0	0 0 1 0 0 1 0 1
1 1 0 1 1 0 0 0	0 0 1 1 1 1 0 0
1 1 1 0 0 0 0 0	0 0 0 1 1 0 0 1
1 1 1 0 0 1 0 0 0	0 0 0 1 1 1 1 0 0
1 1 0 1 0 1 0 0 0	0 0 1 1 0 1 0 0 1
1 1 0 1 0 0 1 0 0 0	0 0 1 1 0 0 0 1 0 1
1 1 0 1 0 1 1 0 0 0	0 0 1 1 0 1 1 1 0 0
1 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0	0 0 1 1 0 1 0 1 0 0 1
1 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0	0 0 1 1 1 0 0 1 0 0 1
1 1 1 0 0 0 0 1 0 0 0	0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 1
1 1 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0	0 0 0 1 1 1 0 0 1 0 0 1
1 1 0 0 1 1 0 0 1 0 0 0	0 0 1 0 0 0 1 1 1 1 0 0
1 1 0 1 0 1 0 0 1 0 0 0	0 0 1 1 0 1 0 0 0 1 0 1
…	…

最后需要指出的是：

（1）同高连续数对总是以定理 3.3 或 3.4 所描述的方式出现，迄今没有发现例外的情况；

（2）每对同高连续数轨迹序列元素的非重叠部分所对应的子奇偶矢量对总是以母体 S_i 和S'_i 结尾，迄今没有发现例外的情况.

表 3.5　前缀 q 和 q'

前缀 q	前缀 q'
0 0 0 0 1 1	1 0 1 0 0 0
0 0 0 1 1 0 1	1 0 1 1 0 0 0
0 1 0 0 0 1 1	1 1 0 1 0 0 0
0 1 0 0 1 1 0 1	1 1 0 1 1 0 0 0
0 1 1 0 0 0 1 1	1 1 1 0 1 0 0 0
0 0 0 0 1 0 1 0 1	1 0 1 0 0 1 0 0 0
0 1 1 0 0 1 1 0 1	1 1 1 0 1 1 0 0 0
0 1 1 1 0 0 0 1 1	1 1 1 1 0 1 0 0 0
0 0 0 1 0 1 1 0 0 1	1 0 1 1 1 0 0 0 0 0
0 1 0 0 0 1 0 1 0 1	1 1 0 1 0 0 1 0 0 0
0 1 0 0 1 1 1 0 0 1	1 1 0 1 1 0 1 0 0 0
0 0 0 1 0 1 1 1 1 0 0	1 0 1 1 1 0 0 1 0 0 0
0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 1	1 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0
0 1 1 0 0 0 1 0 1 0 1	1 1 1 0 1 0 0 1 0 0 0
0 1 1 0 0 1 1 1 0 0 1	1 1 1 0 1 1 0 1 0 0 0
0 0 0 0 1 0 1 1 1 1 0 0	1 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 0
0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 0 1	1 1 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0
0 1 1 0 0 1 1 1 1 1 0 0	1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 0 0
…	…

4 L—tuple

4.1 什么叫 L—tuple

上节介绍的"同高连续数对"是伴随 Collatz 猜想这一特殊问题出现的."同高连续数对"就像自然数中的"孪生素数"那样奇特有趣. 所谓"孪生素数"就是"双胞胎素数",通常指二相邻奇数都是素数,如 3 和 5,5 和 7,11 和 13,17 和 19 等等都是"孪生素数(对)". 除了"双胞胎素数"外,"3 胞胎素数","4 胞胎素数"等等即使有也是凤毛麟角. 如 3,5,7 就是第一个"3 胞胎素数",别的"3 胞胎素数"就很难找了. 而"同高连续数"则不同,除了"2 胞胎同高连续数"即上节已经介绍的"同高连续数对"之外,还有"3 胞胎同高连续数","4 胞胎同高连续数"等等. 本节就来讨论这个问题.

定义 4.1 如果 $l \geqslant 2$ 个连续的自然数 $n, n+1, n+2, \cdots, n+l-1$ 同高,且它们不能前后扩展,否则不都同高,则这 l 个同高连续数称为一个 **l — tuple**,l 是此 tuple 的长度,而这 n 个数中的每个数称为属于这个 l — tuple 的数.

象同高连续数对一样,这里同样需要指出的是,迄今为止大量的验证无一例外地表明,如果这 l 个连续的自然数同高即在对它们各自迭代归 1 的过程中用 2 除的次数相同,则在此过程中用 3 乘的次数 m 也相同. 这也是令人称奇的.

依定义,12 与 13 构成一个 2 — tuple,这是第 1 个 2 — tuple;28,29,30 构成一个 3 — tuple($h = 13, m = 5$),也是第 1 个 3 — tuple. 注意依定义 28 和 29,或 29 和 30 都不能称为 2 — tuple. 但

都可称为同高连续数对.

除了 2 — tuple,3 — tuple,还有 4 — tuple,5 — tuple 等等，例如，第 1 个 4 — tuple 是 314，315，316，317($h = 26, m = 11$)；而第 1 个 5 — tuple 可从图 1.1 的 Collatz 树中找到:98,99,100,101,102($h = 18, m = 7$). 人们在研究中不断发现更长的tuple，例如文[1] 公布了一个 17 — tuple:7083,7084,…,7099. 实际上它是第 1 个 17 — tuple. 文[3] 称发现了一个 52 — tuple,但未公布. 笔者在研究中得到了表 4.1. 该表列出了区间$[1,2^{22})$($2^{22} \approx 4.2 \times 10^6$)的自然数中所有 l — tuple($l \geqslant 2$) 的个数和第 1 个 l — tuple 的起始数及其 h 和 m 的值，其中 52 — tuple(3264428 ~ 3264479,$h = 136, m = 72$) 是该区间中最长的一个 tuple.

表 4.1　区间$[1,2^{22})$ 中 l — taple 的分布情况

l	l — tuple 的个数	第 1 个 l — tuple		
		起始数	用 2 除的次数(高 h)	用 3 乘的次数(m)
2	469633	12	7	2
3	244346	28	13	5
4	87680	314	26	11
5	57864	98	18	7
6	44856	386	6	2
7	18723	943	11	5
8	9938	1494	33	14
9	3712	1680	30	12
10	3572	4722	41	18
11	3020	6576	89	48
12	1724	11696	93	50
13	1154	3982	36	15
14	932	2987	34	14

l	l — tuple 的个数	第 1 个 l — tuple		
		起始数	用 2 除的次数(高 h)	用 3 乘的次数(m)
15	1422	17548	92	49
16	508	36208	31	10
17	457	7083	40	17
18	118	59692	51	22
19	168	159116	54	23
20	167	79592	53	23
21	100	57857	108	58
22	96	212160	56	24
23	91	352258	71	33
24	61	221185	64	29
25	51	57346	54	24
26	58	294913	66	30
27	24	252548	118	63
28	19	530052	70	32
29	13	331778	63	28
30	22	524289	70	32
31	18	1088129	136	73
32	8	913319	131	70
33	4	2065786	129	67
34	6	1541308	127	67
35	5	1032875	128	68
36	5	1264924	87	42
37	0			
38	1	3705089	79	36
39	2	2754368	131	69
40	2	596310	67	30

l	l — tuple 的个数	第 1 个 l — tuple		
		起始数	用 2 除的次数(高 h)	用 3 乘的次数(m)
41	1	2886352	139	74
42	0			
43	1	3350448	79	36
44	1	3848468	141	75
45	0			
46	0			
47	1	3247146	136	72
48	0			
49	0			
50	0			
51	0			
52	1	3264428	136	72

4.2 L — tuple 的无限性

表 4.1 说明，2 — tuple，3 — tuple，…，52 — tuple 在区间$[1, 2^{22})$几乎都存在．人们自然要问：这些 tuple 在区间$[2^{22}, \infty)$还有吗？若有，是有限多个还是无限多个？下面的定理可以回答这些问题．

定理 4.1 如果对某自然数 $l \geqslant 2$，存在 l — tuple，则必存在无限多个 l — tuple．

证 设 l 个连续自然数

$$n, n+1, n+2, \cdots, n+l-1$$

构成一个 l — tuple，且每个自然数在迭代归 1 过程中用 2 除的次数是 h，用 3 乘次数为 m（显然 $m \geqslant 1$）．令

$$k = \frac{2^{3^{m-1}\cdot 2i} - 1}{3^m} \cdot 2^h (i \text{ 为任一正整数}), \qquad (4.2.1)$$

则以下 l 个数

$$n + k, n + k + 1, n + k + 2, \cdots, n + k + l - 1 \qquad (4.2.2)$$

也是一个 l—tuple. 这是因为

(1) 由于

$$2^{3^{m-1}\cdot 2} = 2^{\varnothing(3^m)} \equiv 1(\mathrm{mod}\, 3^m),$$

(这里 $\varnothing$ 是 Euler 函数) 故 k 为正整数，从而(4.2.2)式中的 l 个新数是 l 个连续的正整数；

(2) 这 l 个新数的每一个经过 h 次迭代后变成

$$1 + 2^{3^{m-1}\cdot 2i} - 1 = 2^{3^{m-1}\cdot 2i}.$$

再经过 $3^{m-1}\cdot 2i$ 次迭代则变成 1. 这说明(4.2.2)式中的 l 个数构成一个 l — tuple，且每个数的高为 $h + 3^{m-1}\cdot 2i$，迭代中用 3 乘的次数为 m. 最后由(4.2.1)式中正整数 i 的任意性知(4.2.2)式表示的 l — tuple 有无限多个. 定理 4.1 得证.

由定理 4.1 可知，若对某自然数 $l \geqslant 2$ 找到了一个 l — tuple，则由(4.2.1)和(4.2.2)式可以找到无限多个 l — tuple. 由此可知，表 4.1 所列的 2 — tuple，3 — tuple，52 — tuple 等等既然存在，则它们在自然数中都有无穷多个.

4.3 关于最长的 L — tuple

表 4.1 说明 52 — tuple 是区间 $[1, 2^{22})$ 中最长的 tuple，恐怕没有人相信它是区间 $[1, \infty)$ 中最长的 tuple，也就是说相信在区间 $[1, \infty)$ 中一定有比 52 — tuple 更长的 tuple. 实际上通过检验，可以发理比 52 — tuple 更长甚至长得多的 tuples. 表 4.2 给出了一些区间中最长 tuple 的长度等信息. 其中起始数为 136,696,632 的 120 — tuple($h = 162, m = 85$) 就比 52 — tuple 长得多.

表 4.2　给定区间中最长 tuple 的长及高度表

整数区间	最长 *tuple* 的长	起始数值	迭代次数（高）	用 3 乘次数
$(0\sim1)\times10^7$	65	5772712	140	74
$(1\sim2)\times10^7$	89	18341744	148	78
$(2\sim3)\times10^7$	96	24455681	150	79
$(3\sim4)\times10^7$	73	32607574	152	80
$(4\sim5)\times10^7$	70	41784362	108	52
$(5\sim6)\times10^7$	76	51489056	159	84
$(6\sim7)\times10^7$	70	67722582	180	97
$(7\sim8)\times10^7$	71	70511160	104	49
$(8\sim9)\times10^7$	79	86503338	155	81
$(9\sim10)\times10^6$	98	98041684	114	55
$(1\sim1.1)\times10^8$	81	101583873	179	96
$(1.1\sim1.2)\times10^8$	87	118151698	157	82
$(1.2\sim1.3)\times10^8$	90	123808257	146	75
$(1.3\sim1.4)\times10^8$	120	136696632	162	85
$(1.4\sim1.5)\times10^8$	86	148566784	113	54

但 120 — tuple 也不是区间$[1,\infty)$中最长的 tuple，还有比它长得多的 tuple. 笔者曾搜索到一个 310 — tuple(起始数为 6 622 073 000，$h=142$，$m=69$). 文[4]的作者更是煞费苦心，竟搜索到了一个 35654 — tuple(起始数为 $2^{500}+1$，$h=2204$，$m=1075$)！这恐怕是迄今所发现的一个最长的tuple了. 由定理4.1知如此长的 tuple 在区间$[1,\infty)$中还有无限多个，这不能不令人啧啧称奇！

综上，我们有理由断言，最长的tuple的长度会随搜索区间的增大而增大，并且这种增大是无界的，就是说区间$[1,\infty)$中最长的 tuple 的长度 $l_{max}=\infty$.

4.4 关于非孤立密度

由前面的讨论可知，自然数中属于同高连续数即 $l-\text{tuple}(l \geqslant 2)$ 的数有无限多个. 但也存在不属于任何 $l-\text{tuple}$ 的数，例如对任何 $k \in \mathbf{N}$，数 2^k 与它前后相邻的数就不能构成tuple，这样的数我们称为**孤立数**，所以孤立数也有无穷多个. 属于 $l-\text{tuple}$ 的数又称为**非孤立数**. 为定量地比较非孤立数与孤立数到底哪个多，我们现在考察当区间给定之后，其中的非孤立数在该区间所有自然数中所占的比例即密度是多大这个问题.

设 m_k 表示区间 $[1,2^k](k \in \mathbf{N})$ 内所有非孤立数的个数，$D(k)$ 表示该区间内所有非孤立数在该区间内所有自然数中所占的比例，即同高连续数在该区间的密度，也称为**非孤立密度**，则

$$D(k) = \frac{m_k}{2^k}.$$

例如取 $k=4$，在区间 $[1,2^4]$ 内只有两个 tuple 即 $2-\text{tuple}$：12 和 13，$2-\text{tuple}$：14 和 15，非孤立数共 4 个，其它 11 个数都是孤立数，因此 $D(4)=\frac{4}{2^4}=0.25$. 又如取 $k=5$，在区间 $[1,2^5]$ 内有 5 个 $2-\text{tuple}$：12 和 13，14 和 15，18 和 19，20 和 21，22 和 23，1 个 $3-\text{tuple}$：28，29 和 30，非孤立数共 13 个，其它 18 个数都是孤立数，因此 $D(5)=\frac{13}{2^5}\approx 0.41 > D(4)$.

表 4.3 列出了区间 $[1,2^k](k=1,2,\cdots,24]$ 内非孤立数的个数和密度. 该表说明随着区间的扩大，不仅非孤立数的个数不断增多，而且密度单调增大，当 $k=24$，密度就已达到 $D(24)=0.7248$. 据此，我们有现由猜测

$$\lim_{k\to\infty} D(k) = 1. \qquad (4.4.1)$$

由于孤立数也有无限多，所以不论 k 多么大，总有 $D(k)<1$. 但如果(4.4.1)式正确，则只要 k 充分大，就可使区间 $[1,2^k]$

中 99% 以上的数属于非孤立数即属于 l — tuples($l \geqslant 2$). 又由于属于 l — tuples 的每一个数都满足 Collatz 猜想，故不满足 Collatz 猜想的数（它们是 Collatz 猜想的反例，如果存在的话，它们一定是孤立数）只是极少数.

表 4.3 区间$[1,2^k]$中非孤立数的密度 $D(k)$ 及最长 tuple 的长度 l_{max}

$[1,2^k]$	非孤立数个数	$D(k)$ (%)	l_{max}	$[1,2^k]$	非孤立数个数	$D(k)$ (%)	l_{max}
$[1,2^1]$	0	0		$[1,2^{13}]$	5340	65.19	17
$[1,2^2]$	0	0		$[1,2^{14}]$	10802	65.93	17
$[1,2^3]$	0	0		$[1,2^{15}]$	21925	66.91	17
$[1,2^4]$	4	25.00	2	$[1,2^{16}]$	44511	67.92	25
$[1,2^5]$	13	40.63	3	$[1,2^{17}]$	90024	68.68	25
$[1,2^6]$	32	50.00	3	$[1,2^{18}]$	182048	69.45	27
$[1,2^7]$	69	53.91	5	$[1,2^{19}]$	367482	70.09	29
$[1,2^8]$	147	57.42	5	$[1,2^{20}]$	740758	70.64	40
$[1,2^9]$	303	59.18	6	$[1,2^{21}]$	1491673	71.13	40
$[1,2^{10}]$	620	60.55	7	$[1,2^{22})$	3003711	71.61	52
$[1,2^{11}]$	1270	62.01	9	$[1,2^{23})$	6045633	72.07	65
$[1,2^{12}]$	2618	62.92	14	$[1,2^{24})$	12159386	72.48	77

4.5 可聚结数对

考察图 1.1 的 Collatz 树可知，树上每个顶点（自然数）n 都用唯一一个箭指向另一个顶点($n \to C(n)$)，同时也有一个或两个别

的顶点用箭头指向 n($2n \to n$，且当$\frac{2n-1}{3} \in \mathbf{N}$时，$\frac{2n-1}{3} \to n$)。如 $n = 20$，则 $20 \to 10$；而 $40 \to 20$，且 $13 \to 20$. 又如 $n = 40$，则 $40 \to 20$，而只有 $80 \to 40$. 树中的每个顶点都可以看作其它数的“聚结”点.

定义 4.2 对于 $n, n' \in \mathbf{N}$，若 $C^k(n) = C^k(n')$，且 $C^i(n) \neq 1$，$C^i(n') \neq 1$ ($i = 1, 2, \cdots, k$)，则称 n 和 n′ 是**可聚结数对**，数 $C^k(n) = C^k(n')$ 称为 n 和 n′ 的**聚结点**；特别，当 $n' = n + 1$ 时称 n 和 n + 1 是**可聚结连续数对**；若 J 是使得 $C^k(n) = C^k(n')$ 的最小 k 值，则称 n 和 n′ 是 **J 次可聚结数对**，数 $C^J(n) = C^J(n')$ 称为 n 和 n′ 的**首次聚结点**.

例如，$C^k(17) = C^k(53)$ ($k \geqslant 3$)，$J = 3$. 17 和 53 是可聚结数对，且是 3 次可聚结数对. $C^J(17) = C^J(53) = 20$，20 是 17 和 53 的首次聚结点. 10，5，8，4，2，1 也是它们的聚结点.

又依定义可知：l − tuple 中的任意二数必是可聚结数对；同高连续数对必是可聚结连续数对.

下面考察可聚结连续数对在区间的密度.

定义 4.3 设 n 和 n + 1 是区间 $[1, 2^k]$ 上的 J 次可聚结数对.

(1) 如果 $J \leqslant k$，则称 n 和 n + 1 是该区间上的**条件可聚结数对**；

(2) 如果 $J > k$，则称 n 和 n + 1 是该区间上的**无条件可聚结数对**.

例如，区间 $[1, 2^5]$ 上全部可聚结连续数对是 12 和 13($J = 3$)，18 和 19($J = 4$)，20 和 21($J = 3$)，22 和 23($J = 5$)，28 和 29($J = 3$)，29 和 30($J = 7$)，共 6 对，即 $\#\{n \leqslant 2^5 | n$ 和 $n + 1$ 是可聚结数对$\} = \#\{12, 18, 20, 22, 28, 29\} = 6$，前 5 对因 $J \leqslant k = 5$，故是条件可聚结数对，即 $\#\{n \leqslant 2^5 | n$ 和 $n + 1$ 是 $J(\leqslant 5)$ 次可聚结数对$\} = \#\{12, 18, 20, 22, 28\} = 5$，而第 6 对 29 和 30 因 $J = 7 > k$，故是无条件可聚结数对. 若在区间 $[1, 2^7]$ 上考虑，则 6 对都是

条件可聚结数对了.

定义 4.4 区间$[1,2^k]$上可聚结数对的密度用$D(2^k)$表示，定义为

$$D(2^k)=\#\{n\leqslant 2^k|n\text{ 和 }n+1\text{ 是可聚结数对}\}/2^k.$$

定义 4.5 区间$[1,2^k]$上条件可聚结连续数对的密度用$D_k(2^k)$表示，定义为

$$D_k(2^k)=\#\{n\leqslant 2^k|n\text{ 和 }n+1\text{ 是 }J(\leqslant k)\text{ 次可聚结数对}\}/2^k.$$

例如，$D(2^5)=6/2^5=0.1875$；$D_k(2^5)=5/2^5=0.15625$.

引理 4.1 设n和$n+1$是J次可聚结数对，则$n+m\cdot 2^J$和$n+1+m\cdot 2^J(m=0,1,2,\cdots)$也是$J$次可聚结数对.

证 记

$$T(n)=\{n_0,\ n_1,\ \cdots,\ n_{J-1},\ n_J,\ \cdots\},$$

$$\nu_{J+1}(n)=\{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_{J-1},\ x_J\},$$

$$\begin{aligned}T(n+m\cdot 2^J)=\{&(n+m\cdot 2^J)_0,\ (n+m\cdot 2^J)_1,\ \cdots,\\&(n+m\cdot 2^J)_{J-1},\ (n+m\cdot 2^J)_J,\ \cdots\},\end{aligned}$$

$$\nu_{J+1}(n+m\cdot 2^J)=\{x'_0,\ x'_1,\ \cdots,\ x'_{J-1},\ x'_J\}.$$

仿照定理 2. 1 的证明并利用推论 2. 1，可得

$$x'_i=x_i(i=0,1,2,\cdots,J-1),$$

$$(n+m\cdot 2^J)_J=n_J+m\cdot 3^{x_0+x_1+\cdots+x_{J-1}}. \qquad (4.5.1)$$

同理可得

$$(n+l+m\cdot 2^J)_J=(n+1)_J+m\cdot 3^{x_0+x_1+\cdots+x_{J-1}}. \qquad (4.5.2)$$

由于n和$n+1$是J次可聚结数对，$n_J=(n+1)_J$，因此(4.5.1)与 4.5.2) 两式的右端相等. 左端也应相等：

$$(n+m\cdot 2^J)_J=(n+1+m\cdot 2^J)_J.$$

即$n+m\cdot 2^J$与$n+1+m\cdot 2^J$是J次可聚结数对. 引理 4.1 证毕.

定理 4.2 $D_k(2^k)$是单调增加的，即$D_k(2^k)\leqslant D_{k+1}(2^{k+1})(k$

$= 1,2,3,\cdots$).

证　假设 n 和 $n+1$ 是区间$[1,2^k]$上的任一对 $J(\leqslant k)$ 次可聚结数对. 由引理 4.1 知 $n+2^k$ 和 $n+1+2^k$ 也是 J 次可聚结数对，又它们显然在区间$[2^k+1,2^{k+1}]$中，且是区间$[1,2^{k+1}]$中的条件可聚结数对(因为 $J\leqslant k+1$). 这说明，当区间由$[1,2^k]$扩大一倍到区间$[1,2^{k+1}]$时，区是$[1,2^{k+1}]$中的可聚结连续数对的数目至少比区间$[1,2^k]$中的可聚结连续数对的数目多一倍. 于是有

$$
\begin{aligned}
D_k(2^k) &= \#\{n\leqslant 2^k \mid n \text{ 和 } n+1 \text{ 是 } J(\leqslant k) \text{ 次可聚结数对}\}/2^k \\
&\leqslant \#\{n\leqslant 2^{k+1} \mid n \text{ 和 } n+1 \text{ 是 } J \\
&\qquad (\leqslant k+1) \text{ 次可聚结数对}\}/2^{k+1} \\
&= D_{k+1}(2^{k+1}) \quad (k=1,2,3,\cdots),
\end{aligned}
$$

即 $D_k(2^k)$ 是单调增加的. 于是定理 4.2 得证.

例如，在区间$[1,2^4]$上有 1 对条件可聚结连续数对 12 和 13，将区间扩大 1 倍后，在区间$[1,2^5]$上必至少有 2 对条件可聚结连续数对：12 和 13，$12+2^4$ 和 $12+1+2^4$ 即 28 和 29（实际上共有 5 对).

以上证明了 $D_k(2^k)$ 的单调增加性. 笔者猜想：$D(2^k)$ 也是单调增加的.

5 项公式与停止次数

本节介绍和讨论 3N+1 猜想研究中几个基本概念：n 的项公式，n 的完全停止次数 $t_t(n)$，n 的足够停止次数 $t_s(n)$，n 的系数停止次数 $t_c(n)$以及它们之间的关系.

5.1 n 的项公式

先看一个例子，取 $n=7$，有

$$T(7)=\{C^0(7),\ C^1(7),\ C^2(7),\ \cdots\}$$
$$=\{7,\ 11,\ 17,\ 26,\ 13,\ 20,\ 10,\ 5,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ \cdots\}, \tag{5.1.1}$$

$$v(7)=\{1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ \cdots\}. \tag{5.1.2}$$

对 $T(7)$ 的项 $C^1(7)$，$C^2(7)$，… 作如下分解：

$$C^1(7)=11=\frac{3\times 7+1}{2}=\frac{3}{2}\cdot 7+\frac{1}{2}\left(\lambda_1=\frac{3}{2}>1,\right)$$

$$C^2(7)=17=\frac{3\left(\frac{3}{2}\cdot 7+\frac{1}{2}\right)+1}{2}=\frac{9}{4}\cdot 7+\frac{5}{4},$$

$$C^3(7)=26=\frac{3\left(\frac{9}{4}\cdot 7+\frac{5}{4}\right)+1}{2}=\frac{27}{8}\cdot 7+\frac{19}{8},$$

$$C^4(7)=13=\frac{27}{16}\cdot 7+\frac{19}{16},$$

$$C^5(7)=20=\frac{81}{32}\cdot 7+\frac{73}{32},$$

$$C^6(7)=10=\frac{81}{64}\cdot 7+\frac{73}{64},$$

$$C^7(7) = 5 = \frac{81}{128} \cdot 7 + \frac{73}{128}$$

$$\left(\lambda_7 = \frac{81}{128} < 1,\ t_a = t_c = 7 \right),$$

$$C^8(7) = 8 = \frac{243}{256} \cdot 7 + \frac{347}{256},$$

$$C^9(7) = 4 = \frac{243}{512} \cdot 7 + \frac{347}{512},$$

$$C^{10}(7) = 2 = \frac{243}{1024} \cdot 7 + \frac{347}{1024},$$

$$C^{11}(7) = 1 = \frac{243}{2048} \cdot 7 + \frac{347}{2048} (h = t_t = 11). \tag{5.1.3}$$

对一般的自然数 n，若已知其奇偶矢量 $\nu(n)$，如何用 $\nu(n)$ 的元素表示 n 的一般项 $C^k(n)(k = 1, 2, \cdots)$ 呢?有下面的定理：

定理 5.1 对任一 $n \in \mathbf{N}$，设

$$\nu(n) = \{x_0(n), x_1(n), x_2(n), \cdots\}. \tag{5.1.4}$$

记

$$s_k(n) = x_0(n) + x_1(n) + \cdots + x_{k-1}(n), \tag{5.1.5}$$

$$\lambda_k(n) = 2^{-k} \cdot 3^{s_k(n)}. \tag{5.1.6}$$

则

$$C^k(n) = \lambda_k(n) \cdot n + r_k(n), \tag{5.1.7}$$

其中

$$r_k(n) = \frac{\lambda_k}{2}\left(\frac{x_0}{\lambda_1} + \frac{x_1}{\lambda_2} + \cdots + \frac{x_{k-1}}{\lambda_k} \right). \tag{5.1.8}$$

证 对 k 用归纳法证明.

(1) 当 $k = 1$ 时，若 $x_0 = x_0(n) = 0$，则 $s_1(n) = x_0 = 0$，$\lambda_1(n) = 2^{-1} \cdot 3^0 = \frac{1}{2}$，$r_1(n) = \frac{\lambda_1}{2} \cdot \frac{x_0}{\lambda_1} = 0$，有

$$C^1(n) = \frac{n}{2} = \lambda_1(n) \cdot n + r_1(n),$$

即(5.1.7)式成立;若 $x_0=1$,则 $s_1(n)=1$,$\lambda_1(n)=\frac{3}{2}$,$r_1(n)=\frac{1}{2}$,有

$$C^1(n)=\frac{3n+1}{2}=\lambda_1(n)\cdot n+r_1(n),$$

即(5.1.7)式也成立.

(2) 假设(5.1.7)式对 $k\geqslant 1$ 成立.由于

$$C^{k+1}(n)=C(C^k(n))=\frac{3^{x_k(n)}\cdot C^k(n)+x_k(n)}{2},$$

利用(5.1.5)~(5.1.8),可得

$$\begin{aligned}
C^{k+1}(n)&=\frac{3^{x_k}}{2}\cdot(\lambda_k\cdot n+r_k)+\frac{x_k}{2}\\
&=\frac{3^{x_k}}{2}\cdot\lambda_k\cdot n+\frac{3^{x_k}}{2}\cdot r_k+\frac{x_k}{2}\\
&=\frac{3^{x_k}}{2}\cdot\lambda_k\cdot n+\frac{3^{x_k}}{2}\cdot\frac{\lambda_k}{2}\\
&\quad\cdot\left(\frac{x_0}{\lambda_1}+\frac{x_1}{\lambda_2}+\cdots+\frac{x_{k-1}}{\lambda_k}\right)+\frac{x_k}{2}\\
&=\frac{3^{x_k}}{2}\cdot 2^{-k}\cdot 3^{s_k}\cdot n+\frac{3^{x_k}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2^{-k}\cdot 3^{s_k}\\
&\quad\cdot\left(\frac{x_0}{\lambda_1}+\frac{x_1}{\lambda_2}+\cdots+\frac{x_{k-1}}{\lambda_k}\right)+\frac{x_k}{2}\\
&=2^{-(k+1)}\cdot 3^{s_{k+1}}\cdot n+\frac{1}{2}\cdot 2^{-(k+1)}\cdot 3^{s_{k+1}}\\
&\quad\cdot\left(\frac{x_0}{\lambda_1}+\frac{x_1}{\lambda_2}+\cdots+\frac{x_{k-1}}{\lambda_k}+\frac{x_k}{2^{-(k+1)}3^{s_{k+1}}}\right)\\
&=\lambda_{k+1}\cdot n+\frac{\lambda_{k+1}}{2}\cdot\left(\frac{x_0}{\lambda_1}+\frac{x_1}{\lambda_2}+\cdots+\frac{x_{k-1}}{\lambda_k}+\frac{x_k}{\lambda_{k+1}}\right)\\
&=\lambda_{k+1}\cdot n+r_{k+1}.
\end{aligned}\tag{5.1.9}$$

其中

$$\lambda_{k+1} = 2^{-(k+1)} \cdot 3^{s_{k+1}},$$

$$r_{k+1} = \lambda_{k+1} = \frac{\lambda_{k+1}}{2}\left(\frac{x_0}{\lambda_1} + \frac{x_1}{\lambda_2} + \cdots + \frac{x_k}{\lambda_{k+1}}\right).$$

比较(5.1.9)式和(5.1.7)式可知(5.1.7)中的 k 可代之以 $k+1$. 由(1)和(2)，定理 5.1 得证.

定义 5.1 称(5.1.7)式为 n 的项分解公式，简称 n 的项公式. 其中 $\lambda_k(n)$ 称为 n 的系数；$r_k(n)$ 称为 n 的余项.

定义 5.2 对 $n > 1$，使 $C^k(n) = 1$ 的最少迭代次数 k 称为 n 的完全停止次数，记为 $t_t(n)$；若这样的 k 不存在，则定义

$$t_t(n) = \infty.$$

依以上定义，n 的完全停止次数 $t_t(n)$ 即 n 的高 $h(n)$.

定义 5.3 对 $n > 1$，使 $C^k(n) < n$ 的最少迭代次数 k 称为 n 的足够停止次数，记为 $t_a(n)$；若这样的 k 不存在，则定义

$$t_a(n) = \infty.$$

定义 5.4 对 $n > 1$，使 $\lambda_k(n) < 1$ 的最少迭代次数 k 称为 n 的系数停止次数，记为 $t_c(n)$；若这样的 k 不存在，则定义

$$t_c(n) = \infty.$$

依定义易知，若对每个自然数 $n > 1$ 都有 $t_t(n) < \infty$，则必有 $t_a(n) < \infty$；反之，若对每个自然数 $n > 1$ 都有 $t_a(n) < \infty$，则必有 $t_t(n) < \infty$. 于是由 $3N+1$ 猜想的等价命题3.1可以得到以下等价命题：

$3N+1$ 猜想的等价命题 5.1 对任何自然数 $n > 1$，有

$$t_a(n) < \infty.$$

依此命题，若对每个自然数 $n > 1$，都存在各自对应的有限迭代次数 k，使得 $C^k(n) < n$，则足以证明 $3N+1$ 猜想成立. 这也是为什么称 $t_a(n)$ 为 n 的足够停止次数的原因.

从(5.1.3)式看出 $t_t(n) = h(7) = 11$，$t_a(7) = t_c(7) = 7$.

关于 n 的三个停止次数的关系，有以下定理：

定理 5.2 对任何自然数 $n > 1$，有

$$t_c(n) \leqslant t_a(n) \leqslant t_t(n). \qquad (5.1.10)$$

证 显然，$t_c(n) \leqslant t_t(n)$，$t_a(n) \leqslant t_t(n)$. 下证 $t_c(n) \leqslant t_a(n)$.

因为 $t_a(n) = t_a$ 是使 $C^k(n) < n$ 的最小的 k，由(5.1.7)式，有

$$\lambda_{t_a}(n) \cdot n + r_{t_a}(n) < n.$$

由上式中的 $r_{t_a}(n) > 0$，知 $\lambda_{t_a}(n) < 1$. 故 $t_c(n) \leqslant t_a = t_a(n)$. 定理得证.

注意 不等式 $t_c(n) \leqslant t_a(n)$ 中的"<"目前从理论上不能去掉，但实际上如 $t_c(7) = t_a(7) = 7$(见(5.1.3)式)，"<"号去掉了，并且通过对大大小小的 n 进行检验而无一例外地表明 $t_c(n) = t_a(n)$. 但从理论上证明这一等式至今未彻底解决，仍停留在猜想等式成立上. 不过读者将会看到在一定的限制条件下可以证明

$$t_c(n) = t_a(n).$$

定理 5.3 两个自然数 n 和 m 有相同子奇偶矢量 $v_k = \{x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}\}$ 的充分必要条件是 $n \equiv m (\mathrm{mod} 2^k)$.

证 先证充分性. 因为 $n = m(\mathrm{mod}2^k)$，故存在整数 t，使得 $m = n + t \cdot 2^k$. 有

$$\begin{aligned} C^i(m) &= C^i(n + t \cdot 2^k) \\ &= C^i(n) + t \cdot 2^{k-i} \cdot 3^{s_i(n)} \quad (0 \leqslant i \leqslant k-1). \end{aligned}$$

(定义 $s_0(n) = 0$) 因为当 $0 \leqslant i \leqslant k-1$ 时 $t \cdot 2^{k-i} \cdot 3^{s_i(n)}$ 为偶数，所以 $C^i(m)$ 与 $C^i(n)$ 的奇偶性相同，于是 $x_i(m) = x_i(n) \quad (0 \leqslant i \leqslant k-1)$，即 $v_k(m) = v_k(n) = v_k$. 于是充分性得证.

再证必要性. 由 $v_k(n) = v_k(m) = v_k$，有

$$x_i(n) = x_i(m) = x_i \quad (0 \leqslant i \leqslant k-1),$$

$$\begin{aligned} s_i(n) &= s_i(m) = x_0 + x_1 + \cdots + x_{i-1} \\ &= s_i (1 \leqslant i \leqslant k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_i(n) &= 2^{-i} \cdot 3^{s_i(n)} = 2^{-i} \cdot 3^{s_i(m)} \\ &= \lambda_i(m) = \lambda_i (1 \leqslant i \leqslant k), \end{aligned}$$

$$r_k(n) = r_k(m) = \frac{\lambda_k}{2}(x_0\lambda_1^{-1} + x_1\lambda_2^{-1} + \cdots + x_{k-1}\lambda_k^{-1}),$$

$$C^k(n) = \lambda_k(n) \cdot n + r_k(n),$$
$$C^k(m) = \lambda_k(m) \cdot m + r_k(m),$$
$$C^k(n) - C^k(m) = \lambda_k \cdot (n - m) = \frac{3^{t_k} \cdot (n - m)}{2^k}.$$
注意到上式等号两边都是整数，且 3^{t_k} 与 2^k 互素，故
$$n = m (\bmod 2^k).$$
于是必要性得证.

推论 5.1 将 n 映射成 $\nu_k(n)$ 的函数是以 2^k 为周期的函数，其值域为 $\Pi_0^{k-1}\{0, 1\}$，即长为 k 的奇偶矢量 $\nu_k = \{x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}\}$ 的全体.

记 $\{\varepsilon_i\}(0 \leqslant i \leqslant k-1)$ 为 $\Pi_0^{k-1}\{0, 1\}$ 中的奇偶矢量，设 $i_0 < i_1 < \cdots < i_{k-1}$ 是递增的自然数序列. 令
$$A = [x_{i_0} = \varepsilon_0, x_{i_1} = \varepsilon_1, \cdots, x_{i_{k-1}} = \varepsilon_{k-1}]$$
表示区间 $[1, 2^{i_{k-1}}]$ 中满足条件 $x_{i_j}(n) = \varepsilon_j (0 \leqslant j \leqslant k-1)$ 的 n 的集合，PA 表示这样的 n 在区间 $[1, 2^{i_{k-1}}]$ 所有自然数中所占的比例. $x_{i_0}, x_{i_1}, \cdots, x_{i_{k-1}}$ 可视为随机变量族 $x_0, x_1, \cdots$ 中的变量. 由定理 5.3 和推论 5.1 可得到以下定理.

定理 5.4
$$\begin{aligned} PA &= P[x_{i_0} = \varepsilon_0, x_{i_1} = \varepsilon_1, \cdots, x_{i_{k-1}} = \varepsilon_{k-1}] \\ &= \lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m}\right)\mu\{n \leqslant m \mid x_{i_j}(n) = \varepsilon_j, 0 \leqslant j \leqslant k-1\} \\ &= \frac{1}{2^k}, \end{aligned} \tag{5.1.11}$$
其中 μ 为计数函数，与 # 等效.

在利用定理 5.3 和推论 5.1 证明此定理时需注意：

(1) 区间 $[1, 2^{i_{k-1}}]$ 中的自然数所对应的长为 i_{k-1} 的子奇偶矢量中，满足条件 $x_{i_0} = \varepsilon_0, x_{i_1} = \varepsilon_1, \cdots, x_{i_{k-1}} = \varepsilon_{k-1}$ 的子奇偶矢量的个数为 $\# A = 2^{i_{k-1}-k}$，故有

$$PA = \frac{\# A}{2^{i_{k-1}}} = \frac{1}{2^k}.$$

(2)由于上式与 i_{k-1} 的取值无关，因而

$$PA = \lim_{i_{k-1}\to\infty} PA = \frac{1}{2^k}.$$

当 $k=1$ 时(5.1.11)式变为

$$P[x_i = \epsilon] = \lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m}\right)\mu\{n \leqslant m \mid x_j(n) = \epsilon\} = \frac{1}{2}. \tag{5.1.12}$$

上式是显然的.

定义 5.5 记$[n:k] = \{m \in \mathbf{N} \mid m \equiv n(\bmod 2^k\}$称为 n 的模 2^k 陪集.

定理 5.5 设 $m \in [n:k]$，且 $t_c(n) = k$，则 $t_c(m) = k$.

证 由定理 5.3 知 $x_i(n) = x_i(m) \quad (0 \leqslant i \leqslant k-1)$，故有

$$s_i(n) = s_i(m) \quad (1 \leqslant i \leqslant k),$$
$$\lambda_i(n) = \lambda_i(m) \quad (1 \leqslant i \leqslant k),$$
$$C^k(n) = \lambda_k(m)\cdot n + r_k(n),$$
$$C^k(m) = \lambda_k(m)\cdot m + r_k(m).$$

因为 $$t_c(n) = k,$$

所以

$$\lambda_1(n) \geqslant 1,\ \lambda_2(n) \geqslant 1,\ \cdots,\ \lambda_{k-1}(n) \geqslant 1,\ \lambda_k(n) < 1,$$
$$\lambda_1(m) \geqslant 1,\ \lambda_2(m) \geqslant 1,\ \cdots,\ \lambda_{k-1}(m) \geqslant 1,\ \lambda_k(m) < 1.$$

于是有 $t_c(m) = k$. 定理得证.

本定理说明，陪集$[n:k]$上的所有自然数的系数停止次数 $t_c(n)$ 为常数 k.

定理 5.6 $C^k(n) < n \Leftrightarrow r_k(n)/(1-\lambda_k(n)) < n \qquad (5.1.13)$

证 此等价关系可由(5.1.7)式得到.

记 $$\sigma(n) = \frac{r_k(n)}{1-\lambda_k(n)},$$

则有以下引理：

引理 5.1 若 $m \in [n;k]$，则

$$\sigma(m) = \sigma(n). \tag{5.1.14}$$

定理 5.7 若 $t_c(n) = k$，则存在 $M \in \mathbf{N}$，使得当 $m \in [n;k]$ 且 $m \geqslant M$ 时，有 $t_a(m) = k$.

证 取 $M \in \mathbf{N}$，使得 $\sigma(n) < n + M \cdot 2^k$，又取 $t \in \mathbf{N}$，使得 $t \geqslant M$. 则 $m = n + t \cdot 2^k \in [n;k]$，且 $m \geqslant M$. 又由引理 5.1，有

$$\begin{aligned}\sigma(m) = \sigma(n + t \cdot 2^k) = \sigma(n) &< n + M \cdot 2^k \\ &\leqslant n + t \cdot 2^k = m,\end{aligned}$$

即

$$\frac{r_k(m)}{1 - \lambda_k(m)} < m.$$

由(5.1.13)式，得

$$C^k(m) < m.$$

由此有

$$t_a(m) \leqslant k. \tag{5.1.15}$$

但由(5.1.10)式及定理 5.5，知

$$t_a(m) \geqslant t_c(m) = t_c(n) = k. \tag{5.1.16}$$

由以上两式得到 $t_a(m) = k$. 于是定理得证.

定义 5.6 定义 $P[t_c = k]$ 为区间 $[1, 2^k]$ 上满足条件 $t_c(n) = k$ 的自然数 n 所占的比例，即

$$P[t_c = k] = \frac{1}{2^k} \cdot \mu\{n \in [1, 2^k] \mid t_c(n) = k\}. \tag{5.1.17}$$

类似地可定义 $P[t_c \leqslant k]$ 和 $P[t_c \geqslant k]$.

定理 5.8 对每一自然数 k，极限

$$F(k) = \lim_{m \to +\infty}\left(\frac{1}{m} \cdot \mu\{n \leqslant m \mid t_a(n) \geqslant k\}\right) \tag{5.1.18}$$

存在，且

$$F(k) = P[t_c \geqslant k]. \tag{5.1.19}$$

证　若 $t_c(n) = k$，则由定理 5.7 知只要 $r(\in \mathbf{N})$ 充分大，就有 $t_a(n + r \cdot 2^k) = k$. 这说明集合 $\{n \in \mathbf{N} \mid t_c(n) = k\}$ 与 $\{n \in \mathbf{N} \mid t_a(n) = k\}$ 最多相差有限个点. 再由定理 5.5 知

$$P[t_c = k] = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \cdot \mu\{n \leqslant m \mid t_c(n) = k\},$$

也就有

$$P[t_c = k] = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \cdot \mu\{n \leqslant m \mid t_a(n) = k\}.$$

故

$$\begin{aligned} F(k) &= \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \cdot \mu\{n \leqslant m \mid t_a(n) \geqslant k\} \\ &= \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \cdot \mu\{n \leqslant m \mid t_c(n) \geqslant k\} \\ &= \lim_{k \to \infty} \frac{1}{2^k} \cdot \mu\{n \leqslant 2^k \mid t_c(n) \geqslant k\} \\ &= \frac{1}{2^k} \cdot \mu\{n \in [1, 2^k] \mid t_c(n) \geqslant k\} \\ &= P[t_c \geqslant k]. \end{aligned}$$

于是定理得证.

5.2　分布函数 $F(k)$ 的计算

下面研究如何定量地确定 $F(k)$ 的值.

依定义，有

$$\begin{aligned} P[t_c \geqslant k] &= \frac{1}{2^k} \cdot \mu\{n \in [1, 2^k] \mid t_c(n) \geqslant k\} \\ &= \frac{1}{2^k} \cdot \mu\{n \in [1, 2^k] \mid \lambda_i(n) > 1,\ 1 \leqslant i \leqslant k-1\}. \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

由于 $\lambda_i(n) = 2^{-i} \cdot 3^{s_i(n)} = 2^{-i} \cdot 3^{x_0(n) + \cdots + x_{i-1}(n)} (1 \leqslant i \leqslant k-1)$，则 $\lambda_i(n) > 1$ 等价于以下不等式：

$$x_0(n)+x_1(n)+\cdots+x_{i-1}(n)>i\gamma, \tag{5.2.2}$$

其中
$$\gamma=\ln 2/\ln 3\approx 0.6309. \tag{5.2.3}$$

再令 $y_i(n)=x_i(n)-\gamma(0\leqslant i\leqslant k-2)$，则(5.2.2)式又等价于

$$y_0+y_1+\cdots+y_{i-1}>0(1\leqslant i\leqslant k-1).$$

于是由(5.2.1)式有

$$P[t_C\geqslant k]=\frac{1}{2^k}\cdot\mu\{n\in[1,2^k]\mid y_0+y_1+\cdots+y_{i-1}>0,$$
$$1\leqslant i\leqslant k-1\}.$$

记为

$$\begin{aligned}P[t_C\geqslant k]&=P[y_0+y_1+\cdots+y_{i-1}>0,1\leqslant i\leqslant k-1]\\&=P[y_0>0,y_0+y_1>0,\cdots,\\&\qquad y_0+y_1+\cdots+y_{k-2}>0].\end{aligned} \tag{5.2.4}$$

定义 5.7 若矢量$\{\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{k-1}\}\in\prod_0^{k-1}\{0,1\}$的子矢量$\{\varepsilon_0\}$，$\{\varepsilon_0,\varepsilon_1\}$，$\cdots\{\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{k-2}\}$满足条件

$$\varepsilon_0+\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{i-1}>i\gamma\quad(1\leqslant i\leqslant k-1) \tag{5.2.5}$$

则称矢量$\{\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{k-1}\}$是容许的；如果(5.2.5)式对$i=k$也成立，则称该矢量是活跃的；如果(5.2.5)式对$i=k$不成立，即$\varepsilon_0+\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{k-1}<k\gamma$，则称该矢量是终点的.

若设任一自然数 n 的长为 k 的子奇偶矢量为 $v_k(n)=\{x_0(n),x_1(n),\cdots,x_{k-1}(n)\}$，则由以上的定义和前面的讨论可以归纳以下重要性质：

性质 5.1 矢量$\{x_0(n),x_1(n),\cdots,x_{k-1}(n)\}$是容许矢量$\Leftrightarrow s_i(n)=x_0(n)+x_1(n)+\cdots+x_{i-1}(n)>i\gamma(1\leqslant i\leqslant k-1)\Leftrightarrow\lambda_i(n)>1(1\leqslant i\leqslant k-1)\Leftrightarrow t_c(n)\geqslant k$.

性质 5.2 矢量$\{x_0(n),x_1(n),\cdots,x_{k-1}(n)\}$是活跃矢量$\Leftrightarrow s_i(n)=x_0(n)+x_1(n)+\cdots+x_{i-1}(n)>i\gamma(1\leqslant i\leqslant k)\Leftrightarrow\lambda_i(n)>1(1\leqslant i\leqslant k)\Leftrightarrow t_c(n)\geqslant k$.

性质 5.3 矢量$\{x_0(n), x_1(n), \cdots, x_{k-1}(n)\}$是终点矢量$\Leftrightarrow s_i(n) = x_0(n) + x_1(n) + \cdots + x_{i-1}(n) > i\gamma(1 \leqslant i \leqslant k-1) \Leftrightarrow \lambda_i(n) > 1$且$\lambda_k(n) < 1(1 \leqslant i \leqslant k-1) \Leftrightarrow t_c(n) = k$.

易知当$\{x_0(n), x_1(n), \cdots, x_{k-1}(n)\}$是终点矢量时，有$x_{k-1}(n) = 0$，即$C^{k-1}(n)$为偶数.

定义 5.8 用$n(a, k)$表示长为k且含a个零的容许矢量的个数，并约定当$a < 0$或$a > k$时$n(a, k) = 0$. $n(a, k)$称为修正的二项系数.

令

$$c(a, k) = \begin{cases} 1, & \text{当 } a < k(1-\gamma), \\ 0, & \text{当 } a > k(1-\gamma). \end{cases}$$

有以下定理：

定理 5.9 设矢量$\{\varepsilon_i\} \in \prod_0^{k-1}\{0, 1\}$是含a个零的容许矢量，则$\{\varepsilon_i\}$是终点矢量的充要条件是$c(a, k) = 0$且$c(a-1, k) = 1$.

证 先证必要性. 根据已知，由性质 5.3，有$\lambda_k < 1$，并注意(5.2.2)式，有

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{k-1} < k\gamma,$$

即

$$k - a < k\gamma, \ a > k(1-\gamma),$$

故 $\quad c(a, k) = 0.$

又因为 $\quad \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{k-2} < (k-1)\gamma,$

注意到$\varepsilon_{k-1} = 0$，上式即为

$$(k-1) - (a-1)(k-1)\gamma,$$

于是有 $\quad a - 1 < (k-1)(1-\gamma) < k(1-\gamma).$

故 $\quad c(a-1, k) = 1.$

再证充分性. 因为$c(a, k) = 0$，所以$a > k(1-\gamma)$，于是有

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{k-1} = k - a < k\gamma. \qquad (5.2.6)$$

由于 $\{\varepsilon_0+\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{k-1}\}$ 是容许的，故有

$$\varepsilon_0+\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{k-2}>(k-1)\gamma. \qquad (5.2.7)$$

由(5.2.6)和(5.2.7)式知 $\varepsilon_{k-1}=0$，故上式即为

$$k-a>(k-1)\gamma. \qquad (5.2.8)$$

假设 $c(a-1,k)\neq 1$，则 $a-1>k(1-\gamma)$，即

$$k-a<k\gamma-1. \qquad (5.2.9)$$

上式与(5.2.8)式矛盾，故应有 $c(a-1,k)=1$. 再由(5.2.6)式可知，容许矢量 $\{\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{k-1}$ 是终点的. 定理得证.

分析表明，若 $c(a,k)=0$ 且 $c(a-1,k)=1$ 不同时成立，则只可能有 $c(a,k)=0$ 且 $c(a-1,k)=0$，或 $c(a,k)=1$ 且 $c(a-1,k)=1$ 两种情形，由此有以下推论：

推论 5.2 设矢量 $\{\varepsilon_i\}\in\prod_0^{k-1}\{0,1\}$ 是含 a 个零的容许矢量，则 $\{\varepsilon_i\}$ 是活跃矢量的充要条件是 $c(a,k)=0$ 且 $c(a-1,k)=0$ 或 $c(a,k)=1$ 且 $c(a-1,k)=1$.

定理 5.10(二项迭代公式) 令 $n(0,1)=1$, $n(1,1)=0$，则 $n(a,k)$ 的其余值由以下迭代公式确定：

$$c(a,k)\cdot n(a,k)+c(a-1,k)\cdot n(a-1,k)=n(a,k+1). \qquad (5.2.10)$$

证 易知，一个长为 k 的活跃矢量 $\{\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{k-1}\}$ 可以产生一个长为 $k+1$ 的容许矢量 $\{\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{k-1},\varepsilon_k\}$，而不论 $\varepsilon_k=0$ 或 $\varepsilon_k=1$. 因此，

(1) 若 $\{\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{k-1}\}$ 是含 a 个 0 的活跃矢量，则 $\{\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{k-1},1\}$ 是含 a 个 0 的容许矢量；

(2) 若 $\{\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{k-1}\}$ 是含 $a-1$ 个 0 的活跃矢量，则 $\{\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{k-1},0\}$ 是含 a 个 0 的容许矢量.

再由推论 5.2 知，$c(a,k)\cdot n(a,k)$ 是长为 k 的含 a 个 0 的活跃矢量的个数，而 $c(a-1,k)\cdot n(a-1,k)$ 是长为 k 的含 $a-1$ 个 0 的活跃矢量的个数，两者的和则是长为 $k+1$ 的含 a 个 0 的容

许矢量的个数，即

$$c(a, k)\cdot n(a, k)+c(a-1, k)\cdot n(a-1, k)=n(a, k+1).$$

定理得证.

推论 5.3

$$n(a, k)\leqslant\binom{k}{a}. \tag{5.2.11}$$

引理 5.2

$$P[t_c\geqslant k]=\sum_{a=0}^{k}n(a, k)/2^k=F(k). \tag{5.2.12}$$

证 由(5.2.1)式得

$$\begin{aligned}P[t_c\geqslant k]&=\frac{1}{2^k}\cdot\mu\{n\in[1, 2^k]\mid\lambda_i(n)>1, 1\leqslant i\leqslant k-1\}\\&=\frac{1}{2^k}\cdot\mu\{n\in[1, 2^k]\mid x_0(n)+x_1(n)+\cdots\\&\quad+x_{i-1}(n)>i\gamma, 1\leqslant i\leqslant k-1\}\\&=\frac{1}{2^k}\cdot\mu\{n\in[1, 2^k]\mid\{x_0(n), x_1(n), \cdots,\\&\quad x_{k-1}(n)\}\text{ 是容许的}\}\\&=\sum_{a=0}^{k}\frac{1}{2^k}\cdot\mu\{n\in[1, 2^k]\mid\{x_0(n), x_1(n), \cdots,\\&\quad x_{k-1}(n)\}\text{ 是容许的且含 }a\text{ 个 }0\}\\&=\sum_{a=0}^{k}\frac{1}{2^k}\cdot n(a, k).\end{aligned}$$

再由(5.1.19)知，(5.2.12)式成立. 引理得证.

现在进一步分析(5.2.12)式. 由于 $n(a, k)$ 表示长为 k 且含 a 个零的容许矢量 $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{k-1}\}$ 的个数，既然 $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{k-1}\}$ 是容许矢量，则其中所含的零的个数(或 1 的个数)不能太多(或不能太少)，否则若(5.2.5)式不满足，则 $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{k-1}\}$ 就不是容许矢量了，这说明在(5.2.12)式中，当 a 足够大时，$n(a, k)=0$. 比如当 $a=k$ 时就是如此. 现考虑如何求得一个 $K\in\mathbf{N}$，使得

当 $a>K$ 时，有 $n(a, k)=0$. 为此，设 $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{k-1}\}$ 是容许矢量，则

(1) 若 $\{\varepsilon_0+\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{k-1}\}$ 是活跃矢量，则 $\varepsilon_0+\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{k-1}=k-a>k\gamma$，故有 $a<k(1-\gamma)$；

(2) 若 $\{\varepsilon_0+\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{k-1}\}$ 是终点矢量，则 $\varepsilon_{k-1}=0$，$\varepsilon_0+\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{k-2}=k-a>(k-1)\gamma$，故有 $a<k(1-\gamma)+\gamma$.

由上可知当 $a>K=[k(1-\gamma)+\gamma]$（$[x]$ 表示取整函数）时，必有 $n(a, k)=0$. 于是有以下定理：

定理 5.11

$$P[t_c \geqslant k]=\sum_{a=0}^{[k(1-\gamma)+\gamma]} n(a, k)/2^k=F(k). \quad (5.2.13)$$

上式使(5.2.12)式更加明确. 但也应注意，并非当 $0 \leqslant a \leqslant [k(1-\gamma)+\gamma]$ 时都有 $n(a, k) \neq 0$. 例如，当 $\varepsilon_0=0$，时 $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{k-1}\}$ 就不是容许量，这时 $n(a, k)=0$. 将(5.2.11)式与(5.2.13)式结合，有

$$\begin{aligned} P[t_c \geqslant k] &= \sum_{a=0}^{[k(1-\gamma)+\gamma]} n(a, k)/2^k \\ &= F(k) \leqslant \sum_{a=0}^{[k(1-\gamma)+\gamma]} \binom{k}{a} \Big/ 2^k. \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

利用上式可以证明[8]：

$$\lim_{k \to \infty} F(k)=0. \quad (5.2.15)$$

现在可以利用(5.2.13)式求 $F(k)$ 的值了. 不过为了方便，在利用定理5.10所提供的迭代公式(5.2.10)求 $n(a, k)$ 时需要作一点修改，即令

$$p(a, k)=n(a, k)/2^k,$$
$$s(a, k)=c(a, k)/2.$$

然后依照以下定现作迭代：

定理 5.12（修改的二项迭代公式） 令 $p(0, 1)=\frac{1}{2}$，$p(1,$

1) = 0，则 $p(a, k)$ 的其余值由以下迭代公式确定：

$$s(a, k) \cdot p(a, k) + s(a-1, k) \cdot p(a-1, k) = p(a, k+1). \qquad (5.2.16)$$

由等式(5.2.13)和(5.2.16)所计算出的 $F(k)$ 的一些值见表 5.1. 表中 $F(k)$ 的值随 k 的增大而减小，与(5.2.15)式相一致.

表 5.1　分布函数 $F(k)$ 的一些值

k	$2F(k)$	k	$2F(k)$
10	1.4844×10^{-1}	100	5.2793×10^{-4}
20	5.7182×10^{-2}	200	6.6375×10^{-6}
30	2.3788×10^{-2}	300	1.1543×10^{-7}
40	1.3139×10^{-2}	400	2.4383×10^{-9}
50	7.0746×10^{-3}	500	5.5733×10^{-11}
60	3.8448×10^{-3}	600	1.3434×10^{-12}
70	2.3288×10^{-3}	700	3.1438×10^{-14}
80	1.4149×10^{-3}	800	8.1927×10^{-16}
90	8.2156×10^{-4}	900	2.1675×10^{-17}

5.3　对 t_c 和 t_a 的进一步研究

前面已对 t_c 和 t_a 作过介绍，并且已知 $t_c \leqslant t_a$. 下面要对它们作更深入的研究.

定理 5.13　对 $k \in \mathrm{N}$ 且 $k > 1$，以下条件互相等价：

(1)　存在 $n \in \mathbf{N}$，使得 $t_c(n) = k$.

(2)　区间$[(k-1)\gamma, k\gamma]$包含一整数点.

(3)　不等式 $3^{[k\gamma]}/2^{k-1} > 1$ 成立.

证　(1)⇒(2)　设有某 $n \in \mathbf{N}$，使得 $t_c(n) = k$，则有

$$\lambda_{k-1}(n) = 2^{-(k-1)} \cdot 3^{s_{k-1}(n)} > 1,$$

$$\lambda_k(n) = 2^{-k} \cdot 3^{s_k(n)} = \frac{3^{x_{k-1}(n)}}{2} \cdot \lambda_{k-1}(n) < 1,$$

$$x_{k-1}(n) = 0,$$

$$\begin{aligned} s_{k-1}(n) &= x_0(n) + x_1(n) + \cdots + x_{k-2}(n) \\ &= x_0(n) + x_1(n) + \cdots + x_{k-2}(n) + x_{k-1}(n) = s_k(n), \end{aligned}$$

于是，由　　$s_{k-1}(n) > (k-1)r,\quad s_k(n) < k\gamma,$

得　　$(k-1)\gamma < s_{k-1}(n) = s_k(n) < k\gamma.$

因为 $s_{k-1}(n)$ 与 $s_k(n)$ 都是整数，所以上式说明条件(2) 成立.

(2)⇒(3)　设区间$[(k-1)\gamma, k\gamma]$包含一整数点，则$k\gamma > (k-1)\gamma$且特别有$[k\gamma] > (k-1)\gamma$. 将 $\gamma = \log_3 2$ 代人立即推出(3).

(3)⇒(1)　假设 $3^{[k\gamma]}/2^{k-1} > 1$. 令 $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_{[k\gamma]-1} = 1$, $\varepsilon_{[k\gamma]} = \varepsilon_{[k\gamma]+1} = \cdots = \varepsilon_{k-2} = \varepsilon_{k-1} = 0$, 则存在自然数 $n \in [1, 2^k]$, 使得

$$\begin{aligned} v_k(n) &= \{x_0(n), x_1(n), \cdots, x_{k-2}(n), x_{k-1}(n)\} \\ &= \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{[k\gamma]-1}, \varepsilon_{[k\gamma]}, \cdots, \varepsilon_{k-2}, \varepsilon_{k-1}\}. \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

下证 $t_c(n) = k$. 为此，由性质 5.3 知只需证明以下两不等式

$$s_i(n) = x_0(n) + x_1(n) + \cdots + x_{i-1}(n) > i\gamma (1 \leqslant i \leqslant k-1) \tag{5.3.2}$$

和

$$s_k(n) = x_0(n) + x_1(n) + \cdots + x_{k-1}(n) < k\gamma. \tag{5.3.3}$$

由(5.3.1)式知

$$s_i(n) > i\gamma (1 \leqslant i \leqslant [k\gamma]), \tag{5.3.4}$$

而

$$s_{[k\gamma]+1}(n) = s_{[k\gamma]+2}(n) = \cdots = s_{k-1}(n) = [k\gamma]. \tag{5.3.5}$$

由已知 $2^{-(k-1)} \cdot 3^{[k\gamma]} > 1$, 利用上式有 $\lambda_{k-1}(n) = 2^{-(k-1)} \cdot 3^{s_{k-1}(n)} > 1$, 于是有

$$s_{k-1}(n) > (k-1)\gamma. \tag{5.3.6}$$

由(5.3.5)式和(5.3.6)式可得

$$s_i(n) > i\gamma([k\gamma]+1 \leqslant i \leqslant k-1) \qquad (5.3.7)$$

将(5.3.4)式和(5.3.7)式联合即得(5.3.2)式.

最后证(5.3.3)式.注意 $s_k(n) = [k\gamma]$,有

$$[k\gamma] < k\gamma \Rightarrow 3^{[k\gamma]} < 2^k \Rightarrow 3^{s_k(n)} < 2^k$$
$$\Rightarrow s_k(n) < k\gamma.$$

即(5.3.3)式成立.至此定理5.13全部证毕.

注 当定理5.13容许 $k=1$ 时,只需将(3)中的"$>$"号改写成"$\geqslant$"即行.显然,对任何偶数 $n \in \mathbf{N}$,有 $t_c(n)=1$;且区间$[0, \gamma]$中有整数点0;而 $3^0/2^0=1$.

对任给的 $n \in \mathbf{N}$,如何求 $t_c(n)$?这可以象(5.1.3)式那样通过求 n 的迭代轨迹 $T(n)$ 来求;例如观察(5.13)式知从 $\lambda_1(7)$ 到 $\lambda_6(7)$ 的值都大于1,而 $\lambda_7(7)<1$,则 $t_c(7)=7$.也可以根据 n 的奇偶矢量 $v(n)$ 依公式 $\lambda_k(n) = 2^{-k}\cdot 3^{s_k(n)}$ 考察 $\lambda_k(n)$ 的大小,若 k 是使 $\lambda_k(n)<1$ 的最小值,则 $t_c(n)=k$.现在反过来问:任给一 $k \in \mathbf{N}$,是否一定存在 $n \in \mathbf{N}$,使得 $t_c(n)=k$?答案是否定的,即不一定存在这样的 n.例如,若 $k=1$,则存在这样的 n,即 n 为偶数就行;若 $k=2$,则取 $n=1, 5, 9, 13, 17$ 等数时有 $t_c(n)=2$;但若 $k=3, 6, 9, 11$ 等数时,就找不到对应的 n 了.这是为什么呢?因为这可根据刚刚证明了的定理5.13轻而易举地判断.

例如,取 $k=4$,由定理5.13的(2)知,区间$[(k-1)\gamma, k\gamma] = [3\gamma, 4\gamma]$中有整数2,则存在 $n \in \mathbf{N}$,使得 $t_c(n)=4$;或由该定理的(3)知 $3^{[k\gamma]}/2^{k-1} = 3^2/2^3 > 1$,得出同样的结论.但若取 $k=3$,则因为区间$[2\gamma, 3\gamma]$中不含整数,或因为 $3^{[2\gamma]}/2^2 = 3/4 < 1$ 而可以断定无 n 满足 $t_c(n)=3$.

一般来说,若存在某个 n 满足 $t_c(n)=k$,则由定理5.13的证明过程可知必有无限多个 n 满足 $t_c(n)=k$.

表5.2列出了区间[1, 111]上的诸 k 是否有对应的 n 的情况.k 前加"*"者表示该 k 是无 n 对应的 k.其余的 k 均有对应的 n,且一个 k 对应无穷多个 n.

表 5.2　区间[1, 111]上系数停止次数 t_c 的取值

1	2	*3	4	5	*6	7
8	*9	10	*11	12	13	*14
15	16	*17	18	*19	20	21
*22	23	24	*25	26	27	*28
29	*30	31	32	*33	34	35
*36	37	*38	39	40	*41	42
43	*44	45	46	*47	48	*49
50	51	*52	53	54	*55	56
*57	58	59	*60	61	62	*63
64	65	*66	67	*68	69	70
*71	72	73	*74	75	*76	77
78	*79	80	81	*82	83	*84
85	86	*87	88	89	*90	91
92	*93	94	*95	96	97	*98
99	100	*101	102	*103	104	105
*106	107	108	*109	110	111	

下面考察 n 的足够停止次数 $t_a(n)$. 定理 5.7 表明每个 t_c 的值也是 t_a 的值. 现在问：不能作为 t_c 的值的数象 3, 6, 9, 11 等能否作为 t_a 的值呢?下面就来讨论这个问题.

首先通过对等式 $C^k(n) = \lambda_k(n)\cdot n + r_k(n)$ 中的余项 $r_n(n)$ 的研究，得到以下定理：

定理 5.14　设 $t_c(n) = k$，则余项 $r_k(n)$ 满足估计：

$$r_k(n) \leqslant [k\gamma]/2. \tag{5.3.8}$$

证　当 $k = 1$ 时上式取等号. 下设 $k > 1$，并设 $\nu_k(n) = \{x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}\}$. 由于 $t_c(n) = k$，则

$\lambda_1(n) > 1,\ \lambda_2(n) > 1,\ \cdots,\ \lambda_{k-1}(n) > 1,\ \lambda_k(n) < 1,\ x_{k-1} = 0.$

特别，由

$$\lambda_{k-1} = 2^{-(k-1)}\cdot 3^{x_0+\cdots+x_{k-2}} > 1,$$

$$\lambda_k = 2^{-k}\cdot 3^{x_0+\cdots+x_{k-1}} < 1,$$

得到

$$x_0+\cdots+x_{k-2}>(k-1)\gamma,$$
$$x_0+\cdots+x_{k-1}>k\gamma.$$

所以

$$x_0+\cdots+x_{k-1}\in[(k-1)\gamma,\ k\gamma].$$

由于 $x_0+\cdots+x_{k-1}$ 为整数，则必有

$$x_0+\cdots+x_{k-1}=[k\gamma]. \tag{5.3.9}$$

于是

$$\begin{aligned}r_k(n)&=\frac{\lambda_k}{2}\left(\frac{x_0}{\lambda_1}+\frac{x_1}{\lambda_2}+\cdots+\frac{x_{k-2}}{\lambda_{k-1}}+\frac{x_{k-1}}{\lambda_k}\right)\\&<\frac{1}{2}(x_0+\cdots+x_{k-2}+x_{k-1})=\frac{1}{2}[k\gamma].\end{aligned}$$

定理得证.

定理 5.15 如果 $n\in\mathbf{N}$ 满足 $t_a(n)\leqslant k<\infty$，则当 $n>M(k)$ 时有 $t_c(n)=t_a(n)$，其中

$$M(k)=\max\left\{\frac{[i\gamma]}{2(1-3^{[i\gamma]}/2^i)}\,\middle|\,i=1,2,\cdots,k\right\}. \tag{5.3.10}$$

证 依假设 $t_a(n)\leqslant k$ 知，$t_c(n)$ 是存在的，设为 i. 有 $t_c(n)=i\leqslant t_a(n)\leqslant k$. 下证 $t_a(n)=i$.

由定理 5.14 的证明过程可知 $\lambda_i(n)=2^{-i}\cdot 3^{[i\gamma]}$. 若 $n>M(k)$，依(5.3.10)和(5.3.8)式有

$$n>\frac{[i\gamma]}{2(1-3^{[i\gamma]}/2^i)}\geqslant\frac{r_i(n)}{1-3^{[i\gamma]}/2^i}=\frac{r_i(n)}{1-\lambda_i(n)}.$$

由(5.1.13)式得 $C^i(n)<n$，故 $t_a(n)\leqslant i$. 此式与 $t_a(n)\geqslant i$ 联合知 $t_c(n)=t_a(n)$. 定理得证.

前面提到过等式 $t_c(n)=t_a(n)$ 成立的定界条件问题. 本定理第一次给出了一个定界条件. 不过这个条件还可以加以改进.

定理 5.16 对任何容许的奇偶矢量 $\eta=\{\eta_0,\eta_1,\cdots,\eta_{k-1}\}\in\prod_0^{k-1}\{0,1\}(k=2,3,\cdots)$，存在唯一的其任何截尾矢量为容许

矢量的奇偶矢量 $\nu=\{\nu_0, \nu_1, \nu_2, \cdots\}\in\prod_0^\infty\{0, 1\}$，满足不等式：

$$\sum_{i=0}^{j}\nu_i\leqslant\sum_{i=0}^{j}\eta_i\quad(0\leqslant j\leqslant k-2).\tag{5.3.11}$$

证 首先，用递推的方法构造一个奇偶矢量 ν：

(1)令 $\nu_0=1$.

(2)若 $\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_{k-1}$已被定义，记 $a_k=\nu_0+\nu_1+\cdots+\nu_{k-1}$，令

$$\nu_k=\begin{cases}1, & 当\ 3^{a_k}/2^k<2,\\ 0, & 当\ 3^{a_k}/2^k>2.\end{cases}$$

如此构造的 ν 为

$$\begin{aligned}\nu&=\{\nu_0, \nu_1, \nu_2, \cdots, \}\\ &=\{1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ \cdots\}.\end{aligned}\tag{5.3.12}$$

其次，证明 ν 的任何截尾矢量 $\nu_k=\{\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_{k-1}\}(k=2, 3, \cdots)$都是容许的. 为此对 k 用归纳法.

当 $k=2$ 时，$\nu_2=\{\nu_0, \nu_1\}$是容许的：$\lambda_1=2^{-1}\cdot 3^{\nu_0}=2^{-1}\cdot 3>1$.

假设 $\nu_i=\{\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_{i-1}\}(i=2, 3, \cdots, k)$是容许的：$\lambda_i>1(1\leqslant i\leqslant k-1)$. 由

$$\lambda_{k-1}=\frac{3^{\nu_0+\cdots+\nu_{k-2}}}{2^{k-1}}\begin{cases}<2, & 当\ \nu_{k-1}=1,\\ >2, & 当\ \nu_{k-1}=0,\end{cases}$$

可知当 $\nu_{k-1}=1$ 时，$1<\lambda_{k-1}<2$；当 $\nu_{k-1}=0$ 时，$\lambda_{k-1}>2$，所以

$$\lambda_k=\frac{3^{\nu_{k-1}}}{2}\cdot\lambda_{k-1}=\begin{cases}\dfrac{3}{2}\cdot\lambda_{k-1}>1, & 当\ \nu_{k-1}=1,\\[2ex] \dfrac{1}{2}\lambda_{k-1}>1, & 当\ \nu_{k-1}=0.\end{cases}$$

即不论 ν_{k-1} 为 1 或为 0，都有 $\lambda_k>1$，于是 $\nu_{k+1}=\{\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_k\}$ 是容许的. 这就证明了 ν 的任何截尾矢量 $\nu_k=\{\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_{k-1}\}(k=2, 3, \cdots)$ 都是容许的.

再其次，对 η 的长度 $k=2, 3, \cdots$，用归纳法证明以上构造出

的 ν 满足(5.3.11)式.

当 $k=2$ 时，$\eta=\{1, 0\}$ 或 $\eta=\{1, 1\}$. 有 $\nu_0=1=\eta_0$，(5.3.11)式成立；

当 $k=3$ 时，$\eta=\{1, 1, 0\}$ 或 $\eta=\{1, 1, 1\}$. 有 $\nu_0=1=\eta_0$，$\nu_0+\nu_1=2=\eta_0+\eta_1$，(5.3.11)式成立.

假设(5.3.11)对所有的容许矢量 $\eta\in\prod_0^{k-1}\{0, 1\}$ 成立. 设 $\eta=\{\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_k\}\in\prod_0^k\{0, 1\}$ 是任一容许矢量，只需证明(5.3.11)式对 $j=k-1$ 成立. 为此令

$$b=\sum_{i=0}^{k-2}\nu_i, \quad c=\sum_{i=0}^{k-2}\eta_i,$$

只需证明：

$$b+\nu_{k-1}\leqslant c+\eta_{k-1}, \tag{5.3.13}$$

其中依归纳法假设，有 $b\leqslant c$.

用反证法. 假设 $b+\nu_{k-1}>c+\eta_{k-1}$，则必有 $b=c$，$\nu_{k-1}=1$，$\eta_{k-1}=0$. 而

$$\begin{aligned}\nu_{k-1}=1&\Rightarrow 3^{x_0+\cdots+x_{k-2}}/2^{k-1}<2\\&\Rightarrow 3^{x_0+\cdots+x_{k-2}}/2^k<1\\&\Rightarrow 3^b/2^k<1\Rightarrow 3^c/2^k<1\\&\Rightarrow 3^{c+\eta_{k-1}}/2^k<1\Rightarrow 3^{\eta_0+\cdots+\eta_{k-1}}/2^k<1\\&\Rightarrow \eta_0+\cdots+\eta_{k-1}<k\gamma.\end{aligned}$$

这与 $\eta=\{\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_k\}$是容许矢量矛盾. 这说明(5.3.13)式成立. 这就证明了前面构造的(5.3.12)式的 ν 满足(5.3.11)式.

最后证明 ν 的唯一性. 假设有一个其任何截尾矢量为容许矢量的另一奇偶矢量 $\nu'=\{\nu'_0, \nu'_1, \nu'_2, \cdots\}\in\prod_0^\infty\{0, 1\}$可以取代定理中的矢量 ν. 则由已证明的结果知，对 $k=2, 3, 4, \cdots$有

$$\sum_{i=0}^{j}\nu'_i\leqslant\sum_{i=0}^{j}\nu_i\leqslant\sum_{i=0}^{j}\nu'_i \quad (0\leqslant j\leqslant k-2).$$

由此得到

$$\nu'_i = \nu_i \quad (i = 0, 1, 2, \cdots).$$

从而
$$\nu' = \nu.$$

定理 5.16 全部证完.

从(5.3.12)式，得到表 5.3.

表 5.3 k 与 ν_{k-1} 对应表

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
ν_{k-1}	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	…

将表 5.3 和表 5.2 对照可发现一个有趣的现象：在表 5.3 中使 $\nu_{k-1} = 0$ 的 $k = 3, 6, 9, 11, \cdots$ 正好是表 5.2 中无 n 对应的 k；而使 $\nu_{k-1} = 1$ 的 k 正是表 5.2 中有 n 对应的 k. 这是偶然的巧合还是必然的事实呢?下面的定理回答了这个问题.

定理 5.17 若 $t_c(n) = k$，则 $\nu_{k-1} = 1$；若 $\nu_{k-1} = 1$，则存在 $n \in \mathbf{N}$，使得 $t_c(n) = k$.

证 先设 $t_c(n) = k$. 则 $\lambda_i(n) > 1 (1 \leqslant i \leqslant k-1)$，$\lambda_k(n) < 1$，$x_{k-1}(n) = 0$. 矢量 $\{x_0(n), x_1(n), \cdots, x_{k-1}(n)\}$ 是容许的. 由定理 5.16，有

$$\nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_{k-2} \leqslant x_0 + x_1 + \cdots + x_{k-2},$$

$$\begin{aligned} 3^{\nu_0+\nu_1+\cdots+\nu_{k-2}}/2^k &\leqslant 3^{x_0+x_1+\cdots+x_{k-2}}/2^k \\ &= 3^{x_0+x_1+\cdots+x_{k-1}}/2^k \\ &= \lambda_k(n) < 1, \end{aligned}$$

因此

$$3^{\nu_0+\nu_1+\cdots+\nu_{k-2}}/2^{k-1} < 2,$$

$$\nu_{k-1} = 1.$$

再设 $\nu_{k-1} = 1$. 取 $n \in [1, 2^k]$，使得

$$\begin{aligned} \nu_k(n) &= \{x_0(n), x_1(n), \cdots, x_{k-2}(n), x_{k-1}(n)\} \\ &= \{\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_{k-2}, 0\}. \end{aligned} \qquad (5.3.14)$$

下证 $t_c(n) = k$. 依假设，知

$$3^{\nu_0+\nu_1+\cdots+\nu_{k-2}}/2^{k-1} < 2,$$

故 $$3^{\nu_0+\nu_1+\cdots+\nu_{k-2}}/2^k < 1,$$

即 $$\lambda_k(n) = 3^{x_0+x_1+\cdots+x_{k-2}+x_{k-1}}/2^k < 1.$$

由于 $\nu_k(n)$ 是容许的，故

$$\lambda_i(n) > 1 \quad (1 \leqslant i \leqslant k-1).$$

于是 $t_c(n) = k$. 定理得证.

定理 5.17 说明集合 $\{k | \nu_{k-1} = 1\}$ 与 t_c 的集合相等.

下面证明：(5.3.14) 式中的 $n \in [1, 2^k]$ 是集合 $\{n | t_c(n) = k\}$ 中使得 $r_k(n)$ 取得最大值的 n.

假设 $t_c(m) = k$，则 $\nu_k(m) = \{x_0(m), x_1(m), \cdots, x_{k-1}(m)\}$ 是容许的. 由定理 5.16，有

$$\sum_{i=0}^{j} x_i(n) \leqslant \sum_{i=0}^{j} x_i(m) \quad (0 \leqslant j \leqslant k-2), \tag{5.3.15}$$

并由此有

$$\lambda_j(n) \leqslant \lambda_j(m) \quad (1 \leqslant j \leqslant k-1). \tag{5.3.16}$$

另一方面，由于 $t_c(n) = t_c(m) = k$，有

$$x_{k-1}(n) = x_{k-1}(m) = 0. \tag{5.3.17}$$

由(5.3.9)式有

$$\sum_{i=0}^{k-1} x_i(n) = \sum_{i=0}^{k-1} x_i(m), \tag{5.3.18}$$

$$\lambda_k(n) = \lambda_k(m). \tag{5.3.19}$$

最后由以上各式可得

$$\begin{aligned} r_k(n) &= \frac{\lambda_k(n)}{2}\left(\frac{x_0(n)}{\lambda_1(n)} + \frac{x_1(n)}{\lambda_2(n)} + \cdots + \frac{x_{k-1}(n)}{\lambda_k(n)}\right) \\ &\geqslant \frac{\lambda_k(m)}{2}\left(\frac{x_0(m)}{\lambda_1(m)} + \frac{x_1(m)}{\lambda_2(m)} + \cdots + \frac{x_{k-1}(m)}{\lambda_k(m)}\right) \\ &= r_k(m). \end{aligned}$$

即 $$r_k(n) \geqslant r_k(m). \tag{5.3.20}$$

由定理 5.16 知，上式等号成立当且仅当 $m = n(\mathrm{mod}2^k)$.

归纳以上的讨论，可得以下定理：

定理 5.18 如果 k 是 t_c 的一个值，则 $r_k(n)$ 在集合

$$\{n \mid t_c(n) = k\}$$

中有最大值；并存在唯一一个 $n \in [1, 2^k]$，使得 $r_n(n)$ 取得这个最大值.

6 足够密度

在第4节我们讨论过区间$[1, 2^k]$中属于l－tuples($l = 2, 3, 4, \cdots$)的自然数即非孤立数在该区间的所有自然数中所占的比例即非孤立密度$D(k)$问题，并根据实验数据所反映的$D(k)$随k的增大而增大的事实猜测：$\lim_{k\to\infty} D(k) = 1$，本节先分析奇偶矢量$\boldsymbol{v}_k(n)$的元素中1和0的个数之比，得到与足够停止次数$t_a(n)$有关的一些重要结果；再讨论区间中满足条件$t_a(n) < \infty$的数$n$的密度$\sigma$，并证明了当区间无限增大时$\sigma \to 1$，从而得出结论：几乎所有的自然数$n$满足$t_a(n) < \infty$.

6.1 奇偶矢量元素的1、0比

对任一$n \in \mathbf{N}$，设

$$\left.\begin{aligned} T(n) &= \{C^0(n), C^1(n), C^2(n), \cdots\} \\ &= \{n_0, n_1, n_2, \cdots\}, \\ \boldsymbol{v}(n) &= \{x_0(n), x_1(n), x_2(n), \cdots\}, \\ \boldsymbol{v}_k(n) &= \{x_0(n), x_1(n), \cdots, x_{k-1}(n)\}, \\ s_k(n) &= \sum_{i=0}^{k-1} x_i(n). \end{aligned}\right\} \qquad (6.1.1)$$

定义6.1 $\boldsymbol{v}_k(n)$的元素1与0的个数之比称为$\boldsymbol{v}_k(n)$元素的1、0比，或简称为$\boldsymbol{v}_k(n)$的1、0比，记为$\rho_k(n)$即$\rho_k(n) = s_k(n):(k - s_k(n))$.

显然在一般情况下，$\rho_k(n)$的值会因n的不同而不同；即使对同一个n也会因k的不同而改变，但不管n和k如何变化，总有$0 \leqslant \rho_k(n) \leqslant \infty$. 例如，$\boldsymbol{v}_{40}(2^{40})$的40个元素都是0，$\rho_{40}(2^{40}) =$

$0:40=0$；而 $v_{40}(2^{40}-1)$ 的 40 个元素都是 1，$\rho_{40}(2^{40}-1)=40:0=\infty$. 当 $k>40$ 时，$v_k(2^{40})$ 立即进入循环圈(101)，即 1 和 0 交替出现，故有 $\lim\limits_{k\to\infty}\rho_k(2^{40})=1:1=1$；而 $v_k(2^{40}-1)$ 不会立即进入循环圈(101)，但因为人们已经验证数 $2^{40}-1$ 符合 3N + 1 猜想，故随着 k 的增大 $v_k(2^{40}-1)$ 迟早会进入这个圈，于是也有

$$\lim_{k\to\infty}\rho_k(2^{40}-1)=1:1=1.$$

根据以上分析，我们有理由猜测：对任何 $n\in\mathbf{N}$，有

$$\lim_{k\to\infty}\rho_k(n)=1:1=1. \tag{6.1.2}$$

若上式成立，则只要 k 充分大，就有 $\rho_k(n)\approx 1:1$.

现在问：若 $\rho_k(n)=1:1$，那么能对 n 说什么吗？下面的定理作出了回答.

定理 6.1 若 $\rho_k(n)=1:1$，则仅当 $n=1$ 时 $t_a(n)=\infty$；当 $n>1$ 时 $t_a(n)\leqslant k$.

证 (1) 如果 $n=1$，由于 $T(1)=\{1,2,1,\cdots\}$，显然 $t_a(1)=\infty$.

(2) 如果 $n>1$ 满足 $\rho_k(n)=1:1$，则

1° 若有某 $n_i=1(1\leqslant i\leqslant k)$，则显然 $t_a(n)\leqslant k$；

2° 若 $n_i>1(1\leqslant i\leqslant k)$. 则当 $x_i=0$ 时，有

$$\frac{n_{i+1}}{n_i}=\frac{1}{2}; \tag{6.1.3}$$

当 $x_i=1$ 时，有

$$n_{i+1}=\frac{3n_i+1}{2}.$$

且由此而得到

$$\frac{n_{i+1}}{n_i}=\frac{3t+2}{2t+1}\leqslant\frac{5}{3}. \tag{6.1.4}$$

其中 $t=\dfrac{n_i-1}{2}\geqslant 1$. 于是由(6.1.3)和(6.1.4)式有

$$n_k=\frac{n_k}{n_{k-1}}\cdot\frac{n_{k-1}}{n_{k-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{n_2}{n_1}\cdot\frac{n_1}{n_0}\cdot n_0$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{k/2} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{k/2} \cdot n_0 < n_0 = n. \qquad (6.1.5)$$

即

$$C^k(n) = n_k < n. \qquad (6.1.6)$$

故有

$$t_a(n) \leqslant k. \qquad (6.1.7)$$

定理得证.

推论 6.1 若 $\rho_k(n) \leqslant 1$，则仅当 $n = 1$ 时 $t_a(\bar{n}) = \infty$；当 $n > 1$ 时 $t_a(n) \leqslant k$.

此推论的正确性可由以上定理的证明过程得到．这一推论的成立也是可以想象得到的：既然当 $v_k(n)$ 的元素 1 和 0 是一半对一半时有定理6．1的结论，难道当1比0少时（意味着 n 在迭代中用3乘的次数减少）反而结论不成立吗？

推论 6.1 说明，对任何自然 $n > 1$，只要 $v_k(n)$ 中的 1 的个数不超过 0 的个数，就有 $t_a(n) \leqslant k < \infty$. 下面的定理表明，当 1 的个数适当超过 0 的个数时也有 $t_a(n) < \infty$.

定理 6.2 对任一自然数 $n > 1$，若

$$\rho_k(n) < M = \log 2/\log(5/3), \qquad (6.1.8)$$

则 $t_a(n) \leqslant k$. $\left(1.35692 > M > 1.35691 > \frac{57}{43}\right)$.

证 因为 $\rho_k(n) = s_k(n) : (k - s_k(n))$，所以

$$\rho_k(n) < \log 2/\log(5/3) \Leftrightarrow$$

$$\frac{s_k(n)}{k - s_k(n)} < \log 2/\log(5/3) \Leftrightarrow \frac{s_k(n)}{k} < \frac{\log 2}{\log(10/3)}$$

$$\Leftrightarrow (10/3)^{s_k(n)} < 2^k \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{s_k(n)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k - s_k(n)} < 1.$$

(1) 若某 $n_i = 1(1 \leqslant i \leqslant k)$，则显然 $t_a(n) \leqslant k$.

(2) 若 $n_i > 1(1 \leqslant i \leqslant k)$，则

$$n_k = \frac{n_k}{n_{k-1}} \frac{n_{k-1}}{n_{k-2}} \cdots \frac{n_2}{n_1} \frac{n_1}{n_0} n_0 \leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^{s_k(n)} \left(\frac{1}{2}\right)^{k - s_k(n)} n_0 < n_0 = n.$$

也有 $t_a(n) \leqslant k$. 由(1) 和(2)，定理得证．

定理 6.2 表明，对任一自然数 $n > 1$，只要 $v_k(n)$ 的 k 个元素中 1 的个数不超过 57%，则能确保 $t_a(n) \leqslant k < \infty$. 利用此结果可在对 n 检验是否符合 3N + 1 猜想时带来方便．

现在分析 3N + 1 猜想与(6.1.2) 式的关系．

假设 3N + 1 猜想成立，则显然(6.1.2) 式成立．反之，假设任一自然数 $n > 1$ 满足(6.1.2) 式．取 $\varepsilon = M - 1 > 0$，则存在 $K \in \mathbf{N}$，使得当 $k > K$ 时，有 $\rho_k(n) < 1 + \varepsilon = M = \log 2/\log(5/3)$. 于是由定理 6.2，有 $t_a(n) \leqslant k < \infty$. 由此即得以下等价命题：

3N + 1 猜想的等价命题 6.1 对任何 $n \in \mathbf{N}$，有

$$\lim_{k \to \infty} \rho_k(n) = 1.$$

下面讨论区间上满足 $t_a(n) < \infty$ 的自然数 n 的足够密度 $\sigma(x)$ 和 $\sigma_k(x)$ 及其极限.

6.2 密度 $\sigma(M)$

定义 6.2 设 $M \in \mathbf{N}$，记 $A(M) = \#\{n \leqslant M | n \in \mathbf{N}, t_a(n) < \infty\}$，定义

$$\sigma(M) = A(M)/M \qquad (6.2.1)$$

并称 $\sigma(M)$ 为区间$[1, M]$上的自然数的**足够密度**.

依定义，$A(M)$ 未计自然数 1，因为 $t_a(1) = \infty$. 下面要证明定理 6.3. 为此需要以下引理 6.1[9].

引理 6.1 设 $s_k = \sum_{i=0}^{k-1} x_i$, $L = \log 2/\log(10/3)$，则满足条件

$$1 - L < \frac{s_k}{k} < L \qquad (6.2.2)$$

的所有奇偶矢量 $v_k = \{x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}\}$ 的集合 V_k 满足不等式

$$\frac{\# V_k}{2^k} \geqslant 1 - \frac{1}{4\left(L - \frac{1}{2}\right)^2 k}. \tag{6.2.3}$$

定理 6.3

$$\lim_{M \to \infty} \sigma(M) = 1. \tag{6.2.4}$$

证 利用定理 6.2 和引理 6.1 可证明此定理．分两种情形：

(1) 假设 $M = 2^k$.

注意到(6.2.2)式中不等式$\frac{S_k}{k} < L$与定理 6.2 中不等式$\rho_k(n) < \log 2/\log(5/3)$的等价性，并记$V'_k$表示满足此不等式的所有奇偶矢量$v_k = (x_0, x_1, \cdots, x_{k-1})$的集合，则有

$$A(2^k) \geqslant \# V'_k - 1 \geqslant \# V_k - 1.$$

利用(6.2.4)，得

$$\sigma(2^k) = \frac{A(2^k)}{2^k} \geqslant \frac{\# V_k - 1}{2^k} \geqslant 1 - \frac{1}{4\left(L - \frac{1}{2}\right)^2 k} - \frac{1}{2^k}.$$

故

$$\lim_{k \to \infty} \sigma(2^k) = 1. \tag{6.2.5}$$

(2) 再假设 $2^k \leqslant M < 2^{k+1}$. 记 $a_k = A(2^k)$，且记

$$\begin{aligned} b_k &= 2^k + [(2^{k+1} - 2^k) - (a_{k+1} - a_k)] \\ &= a_k + (2^{k+1} - a_{k+1}). \end{aligned} \tag{6.2.6}$$

有

$$b_k \geqslant 2^k \geqslant a_k. \tag{6.2.7}$$

当 $M = 2^k, 2^k + 1, 2^k + 2, \cdots, b_k$ 时，有

$$\frac{A(M)}{M} \geqslant \frac{a_k}{b_k}. \tag{6.2.8}$$

当 $M = b_k + i (i = 1, 2, \cdots, 2^{k+1} - b_k)$ 时，也有

$$\frac{A(M)}{M} = \frac{A(b_k + i)}{b_k + i} \geqslant \frac{a_k + i}{b_k + i} \geqslant \frac{a_k}{b_k}. \tag{6.2.9}$$

上式最右边的不等式由(6.2.7)式得到．再由(6.2.6)和(6.2.5)式，得

$$\frac{a_k}{b_k}=\frac{a_k/2^k}{b_k/2^k}=\frac{a_k/2^k}{a_k/2^k+2(1-a_{k+1}/2^{k+1})}$$

$$=\frac{\sigma(2^k)}{\sigma(2^k)+2(1-\sigma(2^{k+1}))}\to 1(k\to\infty).$$

最后由上式和(6.2.8)式得到

$$\lim_{M\to\infty}\frac{A(M)}{M}\geqslant\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}=1,$$

即

$$\lim_{M\to\infty}\sigma(M)=1. \qquad (6.2.10)$$

综合(1)、(2)，定理 6.3 得证．

定理 6.3 表明，在 $\lim_{M\to\infty}\sigma(M)=1$ 的意义上，对几乎所有的自然数 n，有 $t_a(n)<\infty$.

在定理 6.3 的证明中，情形(2) 的一般结果(6.2.10) 式是利用情形(1) 的特殊结果(6.2.5) 式得到的. 一般而言，一个与计数数函数(例如 $A(M)$ 有关的命题常具有这样的性质．请看下面的定义 6.3 和定理 6.4[10].

定义 6.3 设当 $n\in\mathbf{N}$ 时 P_n 是一个布尔命题，定义函数 $\mu(x):R\to N$ 为

$$\mu(x)=\#\{n|n\in\mathbf{N},\ n\leqslant x\text{ 且 }P_n\text{ 为真}\},$$

则称 $\mu(x)$ 为计数函数．

定理 6.4 若计数函数 $\mu(x)$ 满足$\lim_{k\to\infty}\frac{\mu(2^k)}{2^k}=1$，则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mu(x)}{x}=1.$$

利用此定理可以直接由(6.2.5) 式推得(6.2.10) 式．

6.3 密度 $\sigma_k(x)$

本段讨论另一种形式的足够密度及其极限.

定义 6.4 设 $k\in\mathbf{N}$，$x\in\mathbf{R}$，记 $A_k(x)=\#\{n\leqslant x|n\in\mathbf{N}$，且对某 $m\in\mathbf{N}$，$p\in\{0,1,2,\cdots,k-1\}$，有 $n_{m+p}<n\}$，定义足

够密度 $\sigma_k(x)$ 为

$$\sigma_k(x) = \frac{A_k(x)}{x}. \tag{6.3.1}$$

这样定义的足够密度虽与 k 有关，但仍有 $\sigma_k(x) \to 1(x \to \infty)$. 下面就来讨论这个问题.

引理 6.2[10] 对于任给 $\eta > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\sum\limits_{k;\,|k/n-\frac{1}{2}|<\eta}\binom{n}{k}}{2^n}\right\} = 1.$$

设 $s_k(n) = \sum\limits_{i=0}^{k-1} x_i(n)$，$L = \log2/\log(10/3)$，$r = L - 1/2$，对 $m \in \mathrm{N}$，$\varepsilon \in [0, r]$，令

$$\mu_{q,\varepsilon} = \{n \leqslant 2^q | n,\ q \in \mathrm{N} \text{ 且 } s_q(n)/q < L - \varepsilon\}. \tag{6.3.2}$$

有以下引理:

引理 6.3

$$\lim_{q\to\infty}\frac{\#\mu_{q,\varepsilon}}{2^q} = 1. \tag{6.3.3}$$

证 由(6.3.2)式，有

$$\#\mu_{q,\varepsilon} = \#\{v_q(n) | s_q(n)/q < L - \varepsilon\}$$

$$= \left\{\sum_{i;\,i/q<L-\varepsilon}\binom{q}{i}\right\}.$$

注意到 $\frac{1}{2} \leqslant L - \varepsilon \leqslant L$，利用引理6.2于上式即得(6.3.3)式，引理得证.

引理 6.4 对任一自然数 $n > 1$，若 $s_k(n)/k < L$，则 $n_k < n$.

证 此引理可由定理 6.2 得到.

引理 6.5 设 $k\in\mathbf{N}$，$q>\frac{1-r}{r}\cdot k$，且 $0<\frac{k}{q+k}\leqslant\varepsilon<r$，则

$$\mu_{q,\varepsilon}\subseteq\mu_{q+p,0}(p=0,1,2,\cdots,k-1).\qquad(6.3.4)$$

证 设 $n\in\mu_{q,\varepsilon}$，则

$$\begin{aligned}\frac{s_{q+p}(n)}{q+p}&\leqslant\frac{s_q(n)}{q+p}+\frac{p}{q+p}\\&\leqslant\frac{s_q(n)}{q}+\frac{k}{q+k}\\&<L-\varepsilon+\frac{k}{q+k}\\&<L.\end{aligned}$$

即 $n\in\mu_{q+p,0}(p=0,1,2,\cdots,k-1)$，故(6.3.4)式成立.

若对 $n>2$，$t_p(n)=j$ 为有限，即 $n_j=1$，则显然对每个 $k\in\mathbf{N}$，有 $m\in\mathbf{N}$，使得 $n_{m+p}<n(p=0,1,2,\cdots,k-1)$. 因此只需对 $j\in\mathbf{N}$ 且 $n_j>1$ 的自然数 n 进行考察就行了.

引理 6.6

$$\lim_{q\to\infty}\sigma_k(2^q)=1.\qquad(6.3.5)$$

证 取 q 和 ε 满足

$$q>\frac{1-r}{r}\cdot k,\ 0<\frac{k}{q+k}\leqslant\varepsilon<r.$$

如果 $n\in\mu_{q,\varepsilon}$，则由引理 6.5，有 $n\in\mu_{q+p,0}(n)$，且

$$\frac{s_{q+p}(n)}{q+p}<L\quad(p=0,1,2,\cdots,k-1).$$

由引理 6.4，有 $n_{q+p}<n$，于是 n 被 $A_k(2^q)$ 计数，故有

$$A_k(2^q)\geqslant\#\mu_{q,\varepsilon},$$

$$\sigma_k(2^q)=\frac{A_k(2^q)}{2^q}\geqslant\frac{\#\mu_{q,\varepsilon}}{2^q}.$$

由上式和(6.3.3)式便推得(6.3.5)式. 引理得证.

最后由定理 6.4 和引理 6.6 得到本节主要定理:

定理 6.5

$$\lim_{x\to\infty}\sigma_k(x)=1. \tag{6.3.6}$$

此定理表明：在 $\lim\limits_{x\to\infty}\sigma_k(x)=1$ 的意义上，对几乎所有的自然数 n，有 $t_a(n)<\infty$.

7 伸长迭代

7.1 通常迭代与伸长迭代

前面各节对 3N + 1 猜想问题的讨论中，对任意给定的 $n \in \mathbf{N}$，由 $C^{k-1}(n)$ 生成 $C^{k}(n)(k = 1, 2, 3, \cdots)$ 的迭代是依据(1.1.1)式定义的 Collatz 数论函数 $C(n)$ 进行的，迭代所得到的(1.1.2)式的轨迹序列 $T(n)$ 和(2.3)式的奇偶矢量 $\nu(n)$ 自然由这个 $C(n)$ 唯一确定．这种依(1.1.1)式定义的函数 $C(n)$ 所进行的迭代是多数学者所采用的迭代，故称为**通常迭代**．

但为了同一研究目的，也有不少学者将 Collatz 函数改写成以下形式：

$$C(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, \ n \equiv 0(\bmod 2); \\ 3n + 1, \ n \equiv 1(\bmod 2). \end{cases} \tag{7.1.1}$$

依如此定义的 $C(n)$ 所进行的迭代与通常迭代相比唯一的不同之处在于：当 n 为奇数时，将通常迭代下的一步 $\left(\dfrac{3n+1}{2}\right)$ 分成两步 $\left(3n + 1 \text{ 和 } \dfrac{3n+1}{2}\right)$．这样原来轨迹序列 $T(n)$ 中的元素全都包含在新的轨迹序列之中且保持顺序不变，但新的轨迹序列中新增添了一些偶数，$T(n)$ 伸长了，对应的奇偶矢量 $\nu(n)$ 也因加进了一些 0 而变长了，Collatz 树因 $h(n)$ 变大而长高了．因此我们称依(7.1.1)的函数 $C(n)$ 所进行的迭代为**伸长迭代**．

例如分别取 $n = 12, 13, 40$，用伸长迭代，有

$T(12) = \{12, 6, 3, \underline{10}, 5, \underline{16}, 8, 4, 2, 1, \underline{4}, 2, 1, \cdots\}$,

$$\nu(12)=\{0\ 0\ 1\ \underline{0}\ 1\ \underline{0}\ 0\ 0\ 0\ 1\ \underline{0}\ 0\ 1\ \cdots\},$$

$$h(12)=9,$$

$$T(13)=\{13,\ \underline{40},\ 20,\ 10,\ 5,\ \underline{16},\ 8,\ 4,\ 2,\ 1,\ \underline{4},\ 2\ 1,\ \cdots\},$$

$$\nu(13)=\{1\ \underline{0}\ 0\ 0\ 1\ \underline{0}\ 0\ 0\ 0\ 1\ \underline{0}\ 0\ 1\ \cdots\},$$

$$h(13)=9,$$

$$T(40)=\{40,\ 20,\ 10,\ 5,\ \underline{16},\ 8,\ 4,\ 2,\ 1,\ \underline{4},\ 2,\ 1,\ \cdots\},$$

$$\nu(40)=\{0\ 0\ 0\ 1\ \underline{0}\ 0\ 0\ 0\ 1\ \underline{0}\ 0\ 1\ \cdots\},$$

$$h(40)=8.$$

以上的 $T(n)$ 和 $\nu(n)$ 的元素下面划了横线的是用伸长迭代比用通常迭代新增加的元素．在通常迭代下，三数12，13和40是同高数，且12和13是同高连续数（$h(12)=h(13)=h(40)=7$），而在伸长迭代下，这三数不再都同高（$h(12)=h(13)=9$，$h(40)=8$），但 12 和 13 仍为同高连续数．

一般说，在通常迭代下若 l 个连续自然数构成一个 L－tuple，则在伸长迭代下它们仍构成一个 L－tuple.

以上所说的两种迭代的一些差别是无关紧要的，因为它们丝毫不影响 3N＋1 猜想的实质，换言之，3N＋1 猜想正确与否，无论采用哪种迭代都将得出同样的结论. 在伸长迭代下有与命题 2.1 类似的等价命题：

3N＋1 猜想的等价命题 7.1 在伸长迭代下，以下两命题都与 3N＋1 猜想等价：

（1） 每个自然数的轨迹序列都以唯一的圈（1，4，2，1）结束．

（2） 每个自然数的奇偶矢量都以唯一的圈（1，0，0，1）结束．

读到这里或许有的读者忍不住会提出这样的问题：两种迭代差不多，既然前面已经介绍了通常迭代，有什么必要再介绍伸长迭代呢？或许又有读者更提出：从迭代法则看，似乎伸长迭代比通常迭代更能体现偶数变奇数，奇数变偶数的迭代过程，那末为什

么不用伸长迭代"统掉"通常迭代，而在前面花了那么多篇幅只讲通常迭代呢?作者的答复是:第一，依据(1.1.1)式的函数所进行的迭代同样能体现偶数变奇数，奇数变偶数的迭代过程;第二，如果非要在两种迭代中选择一种而"统掉"另一种不可的话，那末被"统掉"的决不应该是通常迭代而应该是伸长迭代!这是为什么呢?原因就在奇偶矢量的差异上.

从第2节我们已经知道若采用通常迭代，则在自然数集与奇偶矢量集之间存在一个极漂亮的一一映射.正是由于有了这一数学之美才在接下的内容中使奇偶矢量的作用展现得淋漓尽致!然而令人遗憾的是，在伸长迭代下，奇偶矢量却难以排上用场!这是为什么呢?现举例说明.偶如取 $n \in [1, 8]$，则依伸长迭代，有

$$1 \to T(1) = \{1, \underline{4}, 2, 1, \cdots\},$$
$$v(1) = \{1\ \underline{0}\ 0\ 1\ \cdots\},$$
$$2 \to T(2) = \{2, 1, \underline{4}, 2, 1, \cdots\},$$
$$v(2) = \{0\ 1\ \underline{0}\ 0\ 1\ \cdots\},$$
$$3 \to T(3) = \{3, \underline{10}, 5, \underline{16}, 8, 4, 2, 1, \underline{4}, 2, 1, \cdots\},$$
$$v(3) = \{1\ \underline{0}\ 1\ \underline{0}\ 0\ 0\ 0\ 1\ \underline{0}\ 0\ 1\ \cdots\},$$
$$4 \to T(4) = \{4, 2, 1, \underline{4}, 2, 1, \cdots\},$$
$$v(4) = \{0\ 0\ 1\ \underline{0}\ 0\ 1\ \cdots\},$$
$$5 \to T(5) = \{5, \underline{16}, 8, 4, 2, 1, \underline{4}, 2, 1, \cdots\},$$
$$v(5) = \{1\ \underline{0}\ 0\ 0\ 0\ 1\ \underline{0}\ 0\ 1\ \cdots\},$$
$$6 \to T(6) = \{6, 3, \underline{10}, 5, \underline{16}, 8, 4, 2, 1, \underline{4}, 2, 1, \cdots\},$$
$$v(6) = \{0\ 1\ \underline{0}\ 1\ \underline{0}\ 0\ 0\ 0\ 1\ \underline{0}\ 0\ 1\ \cdots\},$$
$$7 \to T(7) = \{7, \underline{22}, 11, \underline{34}, 17, \underline{52}, 26, 13, \underline{40}, 20, 10, 5, \underline{16}, 8, 4, 2, 1, \underline{4}, 2, 1, \cdots\},$$
$$v(7) = \{1\ \underline{0}\ 1\ \underline{0}\ 1\ \underline{0}\ 0\ 1\ \underline{0}\ 0\ 0\ 1\ \underline{0}\ 0\ 0\ 0\ 1\ \underline{0}\ 0\ 1\ \cdots\},$$
$$8 \to T(8) = \{8, 4, 2, 1, \underline{4}, 2, 1, \cdots\},$$
$$v(8) = \{0\ 0\ 0\ 1\ \underline{0}\ 0\ 1\ \cdots\}.$$

以上各式中，元素底下划线者为用伸长迭代比用通常迭代新

增添的元素．这些新元素的出现，使得在通常迭代下存在的前8个自然数的集合与长为3的子奇偶矢量 v_3 的集合之间的一一映射遭到了破坏，因为出现了“多对一”(或“一对多”)：1和5→{1 0 0}，2和6→{0 1 0}，3和7→{1 0 1}，且无法建立别的象通常迭代那样漂亮的一一映射．因此，在伸长迭代下奇偶矢量失去了通常迭代下的那种光环，而几乎排不上用场．这就是为什么通常迭代能被多数研究者选择，且应该“统掉”伸长迭代的理由．

搞学术研究应当“百花齐放”．诚然，伸长迭代有不能让奇偶矢量施展威力的不足之处，但在不涉及或少涉及奇偶矢量的研讨场合，它是完全可以同通常迭代媲美的，因而也被不少3N＋1猜想的研究者所采用并已取得了可观的成果．因此伸长迭代同通常迭代一样也是3N＋1猜想研究中的“一朵花”，我不会真的用通常迭代将它“统掉”，把用伸长迭代取得的新成果按通常迭代进行“移植”，否则本节书就不存在了．本节下面介绍的就是在伸长迭代下研究3N＋1猜想所取得的成果．

7.2 项公式

设 n 的轨迹序列 $T(n)$ 和奇偶矢量 $v(n)$ 分别为

$$T(n) = \{C^0(n), C^1(n), \cdots, C^{k-1}(n), \cdots\},$$

$$v(n) = \{x_0(n), x_1(n), \cdots, x_{k-1}(n), \cdots\},$$

其中 $C^k(n)$ 称为 $T(n)$ 的一般项，也称 n 的一般项，而

$$x_k(n) = \begin{cases} 0, & 当\ C^k(n) \equiv 0\ 时, \\ 1, & 当\ C^k(n) \equiv 1\ 时. \end{cases}$$

又令 d，e_i，e_0 的含义如下：

d——$C^i(n)(i = 0, 1, 2, \cdots, k-1)$ 为奇数的项的个数，即

$$d = \sum_{i=0}^{k-1} x_i(n).$$

e_i—— 第 i 个奇数项后面连续的偶数项的个数.

e_0—— 第一个奇数项前面的偶数项个数.

则有

$$k - d = e_0 + e_1 + \cdots + e_d. \qquad (7.2.1)$$

关于 n 的项公式，有以下定理：

定理 7.1 设 $C^k(n)$ 是 n 的一般项，则

$$C^k(n) = \frac{3^d}{2^{k-d}} \cdot n + \sum_{i=1}^{d} \frac{3^{d-i}}{2^{e_i+e_{i+1}+\cdots+e_d}} \qquad (7.\ 2.\ 2)$$

$$(k = 1, 2, 3, \cdots).$$

(7. 2. 2) 式就是 n 的项公式，下面对 k 用归纳法证明.

证 1° 当 $k = 1$ 时，有两种情形：

a) 若 $x_0(n) = 0$，则

$$C^k(n) = \frac{n}{2} = \frac{3^0}{2^{1-0}} \cdot n + 0.$$

公式(7. 2. 2)正确.

b) 若 $x_0(n) = 1$，则

$$C^1(n) = 3n + 1 = \frac{3^1}{2^{1-1}} \cdot n + \frac{3^{1-1}}{2^0}.$$

2° 当 $k = 2$ 时，有三种情形：

a) 若 $x_0(n) = 0$, $x_1(n) = 0$，则

$$C^1(n) = \frac{n}{2}, C^k(n) = \frac{n}{4} = \frac{3^0}{2^{2-0}} \cdot n + 0.$$

公式(7. 2. 2)正确.

b) 若 $x_0(n) = 0$, $x_1(n) = 1$，则

$$C^1(n) = \frac{n}{2}, C^2(n) = \frac{3n}{2} + 1 = \frac{3^1}{2^{2-1}} \cdot n + \frac{3^{1-1}}{2^0}.$$

公式(7. 2. 2)正确.

c) 若 $x_0(n) = 1$, $x_1(n) = 0$，则

$$C^1(n) = 3n + 1, C^2(n) = \frac{3n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3^1}{2^{2-1}} \cdot n + \frac{3^{1-1}}{2^1}.$$

公式(7. 2. 2)正确.

3° 假设公式(7. 2. 2)正确. 下证(7. 2. 2)式中的 k 可用 $k+1$ 代换. 有两种情形:

a) 若 $x_k(n)=0$, 则

$$C^{k+1}(n)=\frac{1}{2}C^k(n)=\frac{1}{2}+\left[\frac{3^d}{2^{k-d}}\cdot n+\sum_{i=1}^{d}\frac{3^{d-i}}{2^{e_i+e_{i+1}+\cdots+e_d}}\right]$$

$$=\frac{3^d}{2^{(k+1)-d}}\cdot n+\sum_{i=1}^{d}\frac{3^{d-i}}{2^{e_i+e_{i+1}+\cdots+e_d}}.$$

其中后一个 e_d 比前一个 e_d 大 1. 公式(7. 2. 2)正确.

b) 若 $x_k(n)=1$, 则

$$C^{k+1}(n)=3C^k(n)+1=3\left[\frac{3^d}{2^{k-d}}\cdot n+\sum_{i=1}^{d}\frac{3^{d-i}}{2^{e_i+e_{i+1}+\cdots+e_d}}\right]+1$$

$$=\frac{3^{d+1}}{2^{(k+1)-(d+1)}}\cdot n+\sum_{i=1}^{d}\frac{3^{d+1-i}}{2^{e_i+e_{i+1}+\cdots+e_d}}+1$$

$$=\frac{3^{d+1}}{2^{(k+1)-(d+1)}}\cdot n+\sum_{i=1}^{d+1}\frac{3^{(d+1)-i}}{2^{e_i+e_{i+1}+\cdots+e_{d+1}}}.$$

公式(7. 2. 2)正确.

由 1°、2° 及 3°, 定理得证.

读者可将(7. 2. 2)式的项公式与(5. 1. 7)式通常迭代下的项公式进行比较. 举例说, 令 $n=11$, 并取 $k=5$. 依(5. 1. 7)式, 有

$$C^5(11)=\lambda_5(11)\cdot 11+r_5(11)$$
$$=\frac{3^3}{2^5}\cdot 11+\frac{23}{3^2}=10. \qquad (7.\ 2.\ 3)$$

而依公式(7. 2. 2), 要得到同样的结果需取 $k=8$, 有 $d=3$, $e_1=1$, $e_2=1$, $e_3=1$, $e_0=0$, 得到

$$C^8(11)=\frac{3^3}{2^5}\cdot 11+\frac{3^2}{2^5}+\frac{3}{2^4}+\frac{1}{2^2}=10. \qquad (7.\ 2.\ 4)$$

7.3 $t_a(n)$ 与 $t_c(n)$ 的相等性

足够停止次数 $t_a(n)$ 是(7.2.2)式中使 $C^k(n) < n$ 的最小 k 值；$t_c(n)$ 是该式中使 $\frac{3^d}{2^{k-d}} < 1$ 的最小 k 值. 显然有 $t_c(n) \leqslant t_a(n)$ $(n > 1)$，因为若 $C^k(n) < n$，则必有 $3^d/2^{k-d} < 1$. 一般情况下，$t_a(n)$ 较 $t_c(n)$ 容易求出.

大量的试验表明 $t_a(n)$ 的值一般不大，例如

当 $n \equiv 0 \pmod{2}$ 时，$t_a(n) = 1$；

当 $n \equiv 1 \pmod{2^2}$ 时，$t_a(n) = 3$；

当 $n \equiv 3 \pmod{2^4}$ 时，$t_a(n) = 6$；

当 $n \equiv 11, 23 \pmod{2^5}$ 时，$t_a(n) = 8$；

当 $n \equiv 7, 15, 59 \pmod{2^7}$ 时，$t_a(n) = 11$；

当 $n \equiv 39, 79, 95, 123, 175, 199, 219 \pmod{2^8}$ 时，

$$t_a(n) = 13.$$

以上事实表明，区间$[1, 2^8]$中有 237 个自然数的 t_a 值不超过 13，所占比例为 $\frac{237}{256} \approx 93\%$. 少数 n 的 t_a 值较大，如 $t_a(27) = 96$，$t_a(703) = 132$，$t_a(35655) = 220$，$t_a(270271) = 311$，$t_a(1027341) = 347$，等等，其中 347 是区间$[1, 1065000]$中最大的 t_a. 由此人们普遍相信 90% 以上的自然数其 t_a 都比较小，只有极少数自然数的 t_a 比较大. 那么要问：$t_a(n)$ 是否有界呢？答案是否定的. 例如

$$t_a(2^n - 1) > 2n \to \infty \quad (n \to \infty).$$

从第 5 节知并非所有的自然数都可作为 t_c 的值. 这一结论也可从(7.2.2)式得到. 为此，令

$$L(d) = [d \cdot \log_2 3], \tag{7.3.1}$$

则由已知的不等式$[x] \leqslant x < [x] + 1$，得

$$2^{L(d)} \leqslant 3^d < 2^{1+L(d)}. \tag{7.3.2}$$

因此，如果 $t_c(n)=k$，则 $k-d=1+L(d)$，即

$$k=d+1+L(d) \tag{7.3.3}$$

为可能的系数停止次数 t_c.

人们在验证 3N + 1 猜想的过程中发现：明显的不等式 $t_c(n) \leqslant t_a(n)$ 实际上为等式 $t_c(n)=t_a(n)$，这等式至少在区间 $[1, 1.15\times 10^6]$ 成立，未发现一个例外. 据此人们猜想：对任何 $n\in \mathrm{N}$，$n\neq 1$，有 $t_c(n)=t_a(n)$，但这一猜想迄今未能从理论上获得证明. 不过研究表明，在一定的定界条件下可以证明 $t_c(n)=t_a(n)$，下面就来讨论这个问题.

引理 7.1 选取 $M\in \mathrm{N}$，令

$$b(M)=\max_{m\leqslant M}\{-\log_3[1-2^{L(m)}\cdot 3^{-m}]\}. \tag{7.3.4}$$

则对任何 $d\leqslant M$，有

$$3^{d-b(M)}\leqslant 3^d-2^{L(d)}. \tag{7.3.5}$$

证 令 $m=d$ 代入(7.3.4)式，得

$$b(M)\geqslant\{-\log_3[1-2^{L(d)}\cdot 3^{-d}]\},$$

由此，得

$$3^{b(M)}\geqslant[1-2^{L(d)}\cdot 3^{-d}]^{-1},$$

$$3^{-b(M)}\leqslant 1-2^{L(d)}\cdot 3^{-d},$$

所以

$3^{d-b(M)}\leqslant 3^d-2^{L(d)}$，即(7.3.5)式成立，引理得证.

引理 7.2 选取 $M\in \mathrm{N}$，令

$$B(M)=\max_{m\leqslant M}\{-\log_3[2^{1+L(m)}\cdot 3^{-m}-1]\}. \tag{7.3.6}$$

则对任何 $d\leqslant M$，有

$$3^{d-B(M)}\leqslant 2^{1+L(d)}-3^d. \tag{7.3.7}$$

此引理的证明与引理 7.1 的类似(从略).

表 7.1 列出了 M 及与其对应的 $b(M)$ 和 $B(M)$ 的值. 注意所列 M 的值是使 $b(M)$ 或 $B(M)$ 增加的值.

研究表明，当 $d=\sum_{i=0}^{k-1}x_i(n)$ 不太大时，有 $t_c(n)=t_a(n)$. 下面

的定理具体给出了这种“不太大”的程度.

定理 7.2 若 $k=t_c(n)$，且

$$d\leqslant\min\left\{M,\ \frac{n}{2}\cdot 3^{1-B(M)}\cdot\left[1-3^{-b(M)}\right]^{-1}\right\}. \tag{7.3.8}$$

则 $t_a(n)=k$，即 $t_c(n)=t_a(n)$.

证 因为 $k=t_c(n)$，所以 $3^d/2^{k-d}<1$，注意到

$$k-d=e_0+e_1+\cdots+e_d,$$

$$k=d+1+L(d),$$

有

$$\frac{3^{d-i}}{2^{e_i+e_{i+1}+\cdots+e_d}}<\frac{2^{e_0+e_1+\cdots+e_{i-1}}}{3^i}\leqslant\frac{2^{L(i-1)}}{3^i}.$$

由(7.3.5)式，有

$$\frac{3^{d-i}}{2^{e_i+e_{i+1}+\cdots+e_d}}<\frac{3^{i-1}}{3^i}\cdot(1-3^{-b(M)})\leqslant\frac{1}{3}(1-3^{-b(M)}).$$

由(7.2.2)，有

$$C^k(n)<\frac{3^d}{2^{k-d}}\cdot n+\frac{d}{3}\cdot(1-3^{-b(M)}).$$

现假定 $C^k(n)\geqslant n$，则

$$n<\frac{3^d}{2^{k-d}}\cdot n+\frac{d}{3}(1-3^{-b(M)}).$$

表 7.1 M，b(M)和 B(M)的值

M	b(M)	B(M)	M	b(M)	B(M)
1	1	1	3631		6.49
2	2		4296		6.53
3		1.535	4961		6.59
5		2.665	5626		6.65
7	2.508		6291		6.71
12	3.921		6956		6.77
17		2.946	7621		6.8
29		3.346	8286		6.9
41		4.062	8951		7.0
53	5.618		9616		7.1
94		4.246	10281		7.2
147		4.477	10946		7.3
200		4.785	11611		7.4
253		5.253	12276		7.6
306		6.267	12941		7.8
359	6.23		13606		8.0
665	9.14		14271		8.4
971		6.31	14936		8.9
1636		6.35	15601		10.2
2301		6.39	16266	9.4	
2966		6.44	31867	9.9	

解得
$$n<\frac{d}{3}(1-3^{-b(M)})\cdot\frac{2^{k-d}}{2^{k-d}-3^d}$$
$$=\frac{d}{3}(1-3^{-b(M)})\cdot\frac{2^{1+L(d)}}{2^{1+L(d)}-3^d}.$$
由(7.3.7)式，有
$$n<\frac{d}{3}(1-3^{-b(M)})\cdot\frac{2^{1+L(d)}}{3^{d-B(M)}}$$
$$=\frac{2}{3}d(1-3^{-b(M)})\cdot\frac{2^{L(d)}}{3^d}\cdot 3^{B(M)}.$$
由(7.3.8)式，得
$$n<n\cdot\frac{2^{L(d)}}{3^d}.$$
由(7.3.5)，得
$$n<n.\ 矛盾.$$
故 $C^k(n)<n$，$t_a(n)\leqslant k=t_c(n)$，与已知不等式 $t_a(n)\geqslant t_c(n)$ 联立便得到 $t_c(n)=t_a(n)=k$. 定理得证.

7.4 圈

根据 3N + 1 猜想的等价命题 7.1 知，若 3N + 1 猜想正确，则每一自然数 n 的轨迹序列 $T(n)$ 最终以包含 1 的唯一圈(1，4，2，1)结束.

现假设某 n 的轨迹序列存在一个不包含 1 的圈，看会发生怎样的结果. 这时该圈有最小项，设为 $m>1$，则存在某 $k\in\mathrm{N}$，使得 $C^k(m)=m$. 依 t_c 的定义及(7.2.1)式知 $t_c(m)\leqslant k$.

(1) 如果 $t_c(n)=t_a(n)$ 对任何 $n\in\mathrm{N}$ 成立(至少目前还未发理例外). 则更有 $t_c(m)=t_a(m)$. 于是 $t_a(m)\leqslant k$. 这与 m 是圈中最小项矛盾. 这说明此时 $T(m)$ 没有不含 1 的圈.

(2) 如果 $t_c(n)=t_a(n)$ 不是对任何自然数成立，但圈中的自然数满足定现7.2的定界条件(7.3.8)式. 则依该定理会导致

同样的矛盾. 就是说当 m 满足(7. 3. 8)式时, $T(m)$ 也没有不含 1 的圈.

(3) 当 m 不满足(7. 3. 8)式即

$$d \geqslant \min\left\{M, \frac{m}{2} \cdot 3^{1-B(M)} \cdot 1 - 3^{-b(M)})^{-1}\right\} \quad (7.4.1)$$

时, 则 $T(m)$ 可能存在不含 1 的圈. 这时,

若 $m \geqslant 6 \times 10^7$, $M = 14000$, $b(M) = 9.14$, $B(M) = 8.0$, 代人上式, 得 $d \geqslant 13700$, 由此不难算出 $k \geqslant 35414$. 即 $T(n)$ 不含 1 的圈长至少是 35414;

若 $m \geqslant 2 \times 10^9$, $M = 14000$, $b(M) = 9.14$, $B(M) = 8.0$, 代人上式, 得 $d \geqslant 40700$, $k \geqslant 105208$, 即 $T(n)$ 不含 1 的圈长至少是 105208.

以上数据似乎表明, 除非每个自然数 n 的轨迹序列 $T(n)$ 只包含唯一一个短圈(1, 4, 2, 1), 否则若 $T(n)$ 存在不包含 1 的圈, 则这种圈的长度会随 n 的增大而增大, 且会无限增大.

7. 5 相邻数对的高差估计

从第 3 和第 4 节的讨论可知, 自然数中属于同高连续数对和 l − tuple 的数, 即非孤立数占绝大部分, 其它的数即孤立数相对很少. 研究表明, 即使相邻两个孤立数, 它们的高一般相差也不大.

定义 7. 1 相邻两自然数 n 和 $n+1$ 的高的差 $h(n+1) - h(n)$ 称为 n 的高差, 记为 $f(n)$, 即 $f(n) = h(n+1) - h(n)$.

例如

$$f(8k+4) = \begin{cases} 3, & k = 0; \\ 0, & k \geqslant 1. \end{cases}$$

本节讨论如何估计高差 $f(n)$ 的值.

设 n 在迭代归 1 过程中用 3 乘的次数为 $m(n)$, 用 2 除的次数为 $d(n)$、由于“加 1”不是主要的, 我们将其忽略. 故有

$$n\cdot\frac{3^{m(n)}}{2^{d(n)}}\approx 1,\qquad (7.5.1)$$

$$m(n)+d(n)=h(n).\qquad (7.5.2)$$

同样，对 $n+1$ 有

$$(n+1)\cdot\frac{3^{m(n+1)}}{2^{d(n+1)}}\approx 1,\qquad (7.5.3)$$

$$m(n+1)+d(n+1)=h(n+1).\qquad (7.5.4)$$

当 n 充分大时，$n+1\approx n$，故由(7.5.1)和(7.5.3)式得

$$\frac{3^{m(n)}}{2^{d(n)}}\approx\frac{3^{m(n+1)}}{2^{d(n+1)}}.\qquad (7.5.5)$$

令 $m=m(n+1)-m(n)$，$d=d(n+1)-d(n)$，由上式，得

$$\frac{3^{m}}{2^{d}}\approx 1.\qquad (7.5.6)$$

另外

$$\begin{aligned} m+d &= m(n+1)-m(n)+d(n+1)-d(n) \\ &= [m(n+1)+d(n+1)]-[m(n)+d(n)] \\ &= h(n+1)-h(n) \\ &= f(n)\ (m,d\in \mathbf{Z}). \end{aligned}\qquad (7.5.7)$$

将(7.5.6)和(7.5.7)式联立，解得

$$\mathrm{d}\approx \mathrm{f(n)}\cdot log_6 3,\qquad (7.5.8)$$

$$\mathrm{m}\approx \mathrm{f(n)}\cdot log_6 2.\qquad (7.5.9)$$

故有

$$\frac{m}{f(n)}\approx \log_6 2.\qquad (7.5.10)$$

上面(7.5.10)式就是我们对高差 $f(n)=h(n+1)-h(n)$ 进行估计的依据. 由于该式左边的 m 和 $f(n)$ 都是整数，$\frac{m}{f(n)}$ 为有理数，因而右边的对数 $\log_6 2$ 应取最佳有理逼近，于是将其写成连分数表达式势在必行. 下面给出便于利用计算机求这种形式的对数的有理逼近的方法.

求 $y=\log_a b(1<b<a)$ 的连分数表达式和渐近分数的有效算法：

第1步　令 $b_0=a$，$b_1=b$.

第2步　由

$$b_k^{n_k}<b_{k-1}<b_k^{n_k+1}\quad(k=1,2,\cdots)\tag{7.5.11}$$

$$b_{k+1}=\frac{b_{k-1}}{b_k^{n_k}}\quad(k=1,2,\cdots)\tag{7.5.12}$$

依次求出 n_1，b_2，n_2，b_3，n_3，b_4，…，$(n_k\in\mathbf{N})$.

第3步　由 n_1，n_2，n_3，… 构造 $y=\log_a b$ 的连分数表达式：

$$y=\log_a b=\cfrac{1}{n_1+\cfrac{1}{n_2+\cfrac{1}{n_3+\cfrac{1}{n_4+\cfrac{1}{n_5+\ddots}}}}}$$

$$=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\cdots$$

$$=[0,n_1,n_2,n_3,n_4,n_5,\cdots].\tag{7.5.13}$$

第4步　列表写出 $y=\log_a b$ 的各渐近分数(表7.2)

表7.2　$y=\log_a b$ 的渐近分数

i	-2	-1	0	1	2	3	4	…
n_i			0	n_1	n_2	n_3	n_4	…
p_i	0	1	0	p_1	p_2	p_3	p_4	…
q_i	1	0	1	q_1	q_2	q_3	q_4	…
$y_i=\frac{p_i}{q_i}$			$\frac{0}{1}$	$\frac{p_1}{q_1}$	$\frac{p_2}{q_2}$	$\frac{p_3}{q_3}$	$\frac{p_4}{q_4}$	…

表7.2中，　　$p_i=n_i\cdot p_{i-1}+p_{i-2}$；

$$q_i = n_i \cdot q_{i-1} + q_{i-2}.$$

这里需要说明的是，为什么由第 2 步求出 n_1，n_2，n_3，… 以后就可以得出(7. 5. 13)呢?兹证明如下：

由(7. 5. 11)式知，存在 $x_k > 1$，$x_{k+1} > 1$，使得

$$b_k^{\left(n_k+\frac{1}{x_k}\right)} = b_{k-1}, \tag{7. 5. 14}$$

$$b_{k+1}^{\left(n_{k+1}+\frac{1}{x_{k+1}}\right)} = b_k, \tag{7. 5. 15}$$

由(7. 5. 12)和(7. 5. 14)式，得

$$b_{k+1} = \frac{b_{k-1}}{b_k^{n_k}} = \frac{b_k^{\left(n_k+\frac{1}{x_k}\right)}}{b_k^{n_k}} = b_k^{\left(\frac{1}{x_k}\right)},$$

即

$$b_{k+1}^{x_k} = b_k. \tag{7. 5. 16}$$

由(7. 5. 15)和(7. 5. 16)式，得

$$x_k = n_{k+1} + \frac{1}{x_{k+1}}. \tag{7. 5. 17}$$

由(7. 5. 14)式，得

$$b_k = b_{k-1}^{\left(\frac{1}{n_k+\frac{1}{x_k}}\right)}. \tag{7. 5. 18}$$

在上式中令 $k = 1$，并反复利用(7. 5. 17)式，得

$$b_1 = b_0^{\left(\frac{1}{n_1+\frac{1}{x_1}}\right)}$$

$$\log_{b_0} b_1 = \frac{1}{n_1 + \frac{1}{x_1}} = \frac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{x_2}}}$$

$$= \frac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cfrac{1}{x_3}}}} = \cdots. \tag{7. 5. 19}$$

即(7. 5. 13)式成立.

现在回到(7. 5. 10)式，令 $y=\log_6 2(1<2=b<6=a)$. 依上面给出的方法求得

$$y=\log_6 2=[n_0, n_1, n_2, \cdots, n_9, \cdots]$$
$$=[0, 2, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, \cdots]. \quad (7.5.20)$$

并列出表 7. 3 以求得一部分渐近分数.

表 7. 3　$y=\log_6 2$ 的渐近分数

i	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
n_i			0	2	1	1	2	2	3	1	5	2	…
p_i	0	1	0	1	1	2	5	12	41	53	306	665	…
q_i	1	0	1	2	3	5	13	31	106	137	791	1719	…
$y_i=\frac{p_i}{q_i}$			$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{12}{31}$	$\frac{41}{106}$	$\frac{53}{137}$	$\frac{306}{791}$	$\frac{665}{1719}$	…

表 7. 3 中的 p_i、$q_i(i=0, 1, 2, \cdots)$ 依以下公式计算

$$\left.\begin{array}{l} p_{-2}=0,\ p_{-1}=1,\ q_{-2}=1,\ q_{-1}=0, \\ p_i=n_i\cdot p_{i-1}+p_{i-2},\ q_i=n_i\cdot q_{i-1}+q_{i-2}. \end{array}\right\} \quad (7.5.21)$$

$y=\log_6 2$ 的渐近分数即 $\frac{m}{f(n)}$ 的可能的最佳值为：

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{5}{13}, \frac{12}{31}, \frac{41}{106}, \frac{53}{137}, \frac{306}{791}, \frac{665}{1719}, \cdots \quad (7.5.22)$$

上式中的分母便是 $|f(n)|$ 可能的最佳值.

进一步的研究发现一个奇怪现象，就是(7. 5. 22)式中每两个相邻互素的分母组成的数对 $(a, b)=(2, 3), (3, 5), (5, 13)$，等等似乎是在各自 n 的一定范围内的高差 $f(n)$ 的"基"，就是说，若取定某数对 (a, b)，令

$$d_{a,b}=\min\{\sqrt{x^2+y^2}\,|\,ax+by=f(n)\} \quad (x, y\in Z), \quad (7.5.23)$$

则对一定范围内的 n 值，取数对 (a, b) 同在同样的 n 值范围内取别的互素数对 (a_1, b_1)，相比，有 $|d_{a,b}| \leqslant |d_{a_1,b_1}|$. 例如，$(a, b) = (2, 3) \leftrightarrow n \in [1, 2]$；$(3, 5) \leftrightarrow n \in [3, 8]$；$(5, 13) \leftrightarrow n \in [9, 24]$，$(13, 31) \leftrightarrow n \in [25, m]$（$m$ 至少为 20000）. 其中素数对 $(13, 31)$ 尤为神秘，下面就来具体考察 $d_{13,31}$ 的值. 为此先得作点准备.

注意，(7.5.23) 式涉及到一个理论问题，就是当正整数 a，b 互素即 $(a, b) = 1$ 时，不定方程 $ax + by = f(n)$ 有整数解 (x, y) 且有无穷多组整数解（因此 $d_{a,b}$ 存在）. 这需要以下引理和定理.

引理 7.3 如果 a，b 是两个互素的正整数，则存在 $x, y \in \mathbf{Z}$，使得

$$ax + by = 1. \tag{7.5.24}$$

证 上式是数论科学中最基本的重要等式之一。为独立与完整也为了有的读者的需要起见，现分三步写出它的证明。

(1) 设 A 和 B 是能写成形如 $ax + by$ 的二个整数，这里 a 和 b 是引理中的互素正整数，$x, y \in \mathbf{Z}$，则 $k_1A + k_2B\ (k_1, k_2 \in \mathbf{Z})$ 也可以写成 $ax + by$ 的形式，这是因为若

$$A = ax_1 + by_1, \quad B = ax_2 + by_2,$$

则 $$k_1A + k_2B = a(k_1x_1 + k_2x_2) + b(k_1y_1 + k_2y_2).$$

由于 $k_1x_1 + k_2x_2 \in \mathbf{Z}$ 且 $k_1y_1 + k_2y_2 \in \mathbf{Z}$，故 $k_1A + k_2B$ 也是形如 $ax + by$ 的整数.

(2) 不妨设 $a > b$，则必存在正整数 $q_1 > 0$，整数 r_1，使得

$$a = bq_1 + r_1 \quad (0 \leqslant r_1 < b).$$

当 $r_1 > 0$ 时，同样由于 $b > r_1$，必存在正整数 $q_2 > 0$，整数 r_2，使得

$$b = r_1q_2 + r_2(0 \leqslant r_2 < r_1).$$

如此继续下去，由于余数 $r_1, r_2, \cdots$ 逐渐减小，所以经过有限步以后，可使余数为 0. 此过程就是：

$$a = bq_1 + r_1(0 < r_1 < b),$$

$$b = r_1 q_2 + r_2 (0 < r_2 < r_1),$$
$$r_1 = r_2 q_3 + r_3 (0 < r_3 < r_2),$$
$$\cdots$$
$$r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n (0 < r_n < r_{n-1}),$$
$$r_{n-1} = r_n q_{n+1}.$$

(7. 5. 25)

上式中最后一式的余数为 0. 由上式的第一式有$(a, b) = (b, r_1)$，由第二式有$(b, r_1) = (r_1, r_2)$，由第三式有$(r_1, r_2) = (r_2, r_3)$，… 由最后一式有$(r_{n-1}, r_n) = r_n$. 所以有

$$(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = \cdots = (r_{n-1}, r_n) = r_n,$$

即最后一个余数 r_n 就是 a 和 b 的最大公约数. 由于$(a, b) = 1$，故 $r_n = 1$.

(3) 将(7. 5. 25) 式写成：

$$r_1 = a - q_1 b,$$
$$r_2 = b - q_2 r_1,$$
$$r_3 = r_1 - q_3 r_2,$$
$$\cdots$$
$$r_n = r_{n-2} - q_n r_{n-1}.$$

(7. 5. 26)

其中 $q_1, q_2, \cdots, q_n \in \mathbf{Z}$. 由于 a 和 b 本身都是形如 ax + by 的数，故由(1) 的讨论可知，(7. 5. 26) 式的第一式中的 r_1 是形如 ax + by 的数；又由 b 和 r_1 是形如 ax + by 的数可推知第二式中的 r_2 也是形如 ax + by 的数；如此下去可以最后推知 $r_n = 1$ 也是形如 ax + by 的数，因此 ax + by = 1，即存在 x，y $\in \mathbf{Z}$，使得 ax + by = 1. 于是引理 7. 3 得证.

引理 7. 4 如果 a，b 是两个互素的正整数，而 c 是一个整数，则存在 x，y $\in \mathbf{Z}$，使得

$$ax + by = c. \qquad (7.\ 5.\ 27)$$

证 由引理 7. 3 知，存在 x_0，$y_0 \in \mathbf{Z}$，使得

$$ax_0 + by_0 = 1.$$

令 $x = cx_0$，$y = cy_0$ 代入上式，得

$$ax + by = c,$$

即方程(7. 5. 27) 有整数解 $(x, y) = (cx_0, cy_0)$. 引理得证.

定理7. 3 如果 a，b 是两个互素的正整数，而 c 是一个整数，且不定方程

$$ax + by = c \tag{7. 5. 28}$$

有一组整数解 $x = x_0$，$y = y_0$，则对任何 $k \in \mathbf{Z}$，

$$\begin{cases} x = x_0 + kb \\ y = y_0 - ka \end{cases} \tag{7. 5. 29}$$

也是方程(7. 5. 28)的整数解，且是它们的一切整数解.

证 因为 $x = x_0$，$y = y_0$ 是方程(7. 5. 28) 的一组解，则

$$ax_0 + by_0 = c. \tag{7. 5. 30}$$

由此有

$$a(x_0 + kb) + b(y_0 - ka) = ax_0 + by_0 = c.$$

因而(7. 5. 29)式也是方程(7. 5. 28)的整数解.

设 x'，y' 是方程(7. 5. 28) 的任一组整数解，则

$$ax' + by' = c. \tag{7. 5. 31}$$

(7. 5. 31)－(7. 5. 30)，得

$$a(x' - x_0) + b(y' - y_0) = 0,$$

$$a(x' - x_0) = - b(y' - y_0). \tag{7. 5. 32}$$

由上式和 $(a, b) = 1$，知 $b \mid (x' - x_0)$，$x' - x_0 = kb$，即

$$x' = x_0 + kb. \tag{7. 5. 33}$$

将上式代入(7. 5. 32)式，得

$$y' = y_0 - ka. \tag{7. 5. 34}$$

(7. 5. 33)式和(7. 5. 34)式表明 x'，y' 可以表示成(7. 5. 29)式的形状，故(7. 5. 29) 式表示方程(7. 5. 28) 的一切整数解. 定理得证.

现在回到(7. 5. 23) 式. 由引理 7.4 和定理 7. 3 知，方程 ax

$+by=f(n)$ 有形如(7.5.29)的整数解，其中 x_0，y_0 是方程 $ax+by=f(n)$ 的一组解，$k\in Z$. 将 $x=x_0+kb$，$y=y_0-ka$ 代入根式 $\sqrt{x^2+y^2}$，得

$$\varphi(k)=\sqrt{(x_0+kb)^2+(y_0-ka)^2}\quad(k\in Z).\tag{7.5.35}$$

容易证明函数

$$\varphi(x)=\sqrt{(x_0+bx)^2+(y_0-ax)^2}\quad(x\in R)\tag{7.5.36}$$

是凸函数，因而 $\min\varphi(k)$ 即(7.5.23)式的意义是明确的.

现具体取数对 $(a,b)=(13,31)$，并取自然数 $n\in[5385,5399]$，得到表 7.4.

表 7.4

n	$h(n)$	$f(n)$	x	y	$[d_{13,31}]^2$
5385	147	−80	1	−3	10
5386	67	80	−1	3	10
5387	147	−80	1	−3	10
5388	67	0	0	0	0
5389	67	−39	−3	0	9
5390	28	0	0	0	0
5391	28	88	2	2	8
5392	116	−49	1	−2	5
5393	67	93	0	3	9
5394	160	0	0	0	0
5395	160	−44	−1	−1	2
5396	116	0	0	0	0
5397	116	−49	1	−2	5
5398	67	0	0	0	0
5399	67	49	−1	2	5

表 7. 4 中 $d_{13,31} = \min\{\sqrt{x^2+y^2} \mid 13x + 31y = f(n)\}$，其绝对值很小. 而且计算表明当取 $(a, b) = (13, 31)$ 且取自然数 $n \in [25, m]$（m 至少为 20000）时 $|d_{13,37}|$ 也不大. 这一奇怪现象是与 $\frac{m}{f(n)}$ 的(7. 5. 22)式最佳渐近分数表示密切相关的.

8 压缩迭代

8.1 压缩迭代的意义

本节和下节讨论在压缩迭代下研究 3N + 1 猜想．顾名思义，自然数 n 通过压缩迭代，其轨迹序列 $T(n)$ 和奇偶矢量 $v(n)$ 一定比伸长迭代和通常迭代时都短．那么采用压缩迭代所依据的 Collatz 函数 $C(n)$ 应如何定义呢?在给出这个新的函数定义之前必须明确这样一个判断:若所有奇数(或偶数)符合 3N + 1 猜想，则所有自然数也符合 3N + 1 猜想．因此在 3N + 1 猜想的研讨中只需考察奇数(或偶数)就行了．我们选择只考察奇数．设任取一奇数 n，作运算 $\frac{3n+1}{2}$，若 $\frac{3n+1}{2}$ 为偶数，再作运算 $\frac{3n+1}{2^2}$，如此直到得到奇数 $\frac{3n+1}{2^{e(n)}}$(这里 $e(n)$ 表示使偶数 $3n+1$ 能被 $2^{e(n)}$ 整除的最大自然数)．若把从 n 到 $\frac{3n+1}{2^{e(n)}}$ 的迭代作为一步，这便是所谓的压缩迭代．就是定义 Collatz 函数 $C(n)$ 为

$$C(n)=\frac{3n+1}{2^{e(n)}}\quad (n\in \mathrm{N}_d),\qquad (8.1.1)$$

其中 N_d 表示全体奇自然数的集合;$e(n)$ 表示使偶数 $3n+1$ 能被 $2^{e(n)}$ 整除的最大自然数．则依此函数对奇数 n 所作的迭代称为压缩迭代．

同通常迭代和伸长迭代相比，在压缩迭代下 n 的轨迹序列 $T(n)$ 短得多，且全由奇数组成，奇偶矢量 $v(n)$ 则全由 1 组成，$h(n)$ 变小，Collatz 树变矮．例如：

$T(1) = \{1, 1, \cdots\}$, $\nu(1) = \{1\ 1 \cdots\}$, $h(1) = 0$,

$T(49) = \{49, 37, 7, 11, 17, 13, 5, 1, 1, \cdots\}$,

$\nu(49) = \{1\ 1 \cdots\}$, $h(49) = 7$,

$T(51) = \{51, 77, 29, 11, 17, 13, 5, 1, 1, \cdots\}$,

$\nu(51) = \{1\ 1 \cdots\}$, $h(51) = 7$.

在通常迭代和伸长迭代下，49，50，51，构成一个 3－tuple，现在 49 和 51 仍然同高. 这一性质带有普通性. 又易知有以下等价命题：

3N + 1猜想的等价命题 8.1 在压缩迭代下，每个奇数的轨迹序列以定点 1 结束.

三种迭代相比，互相间明显的不同点是奇偶矢量的差别. 如果说在通常迭代下奇偶矢量的作用神通广大，那么在伸长迭代下奇偶矢量的作用便大打折扣，而在压缩迭代下奇偶矢量的作用则完全丧失. 这都是由迭代函数的差别引起的. 象对伸长迭代我们应保留其地位一样，对压缩迭代也不应以奇偶矢量是否有用为唯一标准来决定取舍. 事实上，压缩迭代是后起之秀，在 3N + 1 猜想中发挥着独特作用，正被越来越多的研究者采用，并已取得不少奇妙独特的研究成果，大有后来居上之势. 故在本节和下节专门讲述之.

8.2 奇数及其次方序列

定义 8.1 设 $a \in \mathbf{N}$，m 为有理数，定义函数 $B_a(m)$ 为

$$B_a(m) = (2^a \cdot m - 1)/3. \qquad (8.2.1)$$

依定义，$B_a(m)$ 一般为有理数.

定义 8.2 对序列

$$\{a_i | i = k, k-1, \cdots, 2, 1; i, a_i, k \in \mathbf{N}\}, \qquad (8.2.2)$$

定义函数 $B_{a_k a_{k-1} \cdots a_1}(m)$ 为

$$B_{a_k a_{k-1} \cdots a_1}(m) = B_{a_k}(B_{a_{k-1} \cdots a_1}(m))$$

$$= (2^{a_k} \cdot B_{a_{k-1}\cdots a_1}(m) - 1)/3. \qquad (8.2.3)$$

依定义，函数 $B_{\{a_i\}}(m)$ 一般为有理数，其中$\{a_i\}$ 表示$\{a_j, a_{j-1}, \cdots, a_2, a_1\}(j = k, k-1, \cdots, 2, 1)$.

定理 8.1 设 $n \in \mathbf{N}_d$，$B_{a_j\cdots a_1}(n) \in \mathbf{Z}$. 则

$$B_{a_i\cdots a_1}(n) \in \mathbf{N}_d \quad (1 \leqslant i \leqslant j); \qquad (8.2.4)$$

$$C(B_{a_{i+1}\cdots a_1}(n)) = B_{a_i\cdots a_1}(n) \quad (1 \leqslant i < j); \qquad (8.2.5)$$

$$C(B_{a_1}(n)) = n. \qquad (8.2.6)$$

证 (1) 首先证明(8.2.4)式. 为此

i) 先证

$$B_{a_i\cdots a_1}(n) \in \mathbf{Z} \quad (1 \leqslant i < j). \qquad (8.2.7)$$

由已知，当 $i = j$ 时，$B_{a_i\cdots a_1}(n) \in \mathbf{Z}$，即

$$B_{a_j\cdots a_1}(n) \in \mathbf{Z}. \qquad (8.2.8)$$

假设当$i = k$(k是满足$1 < k \leqslant j$的某个自然数)时，$B_{a_i\cdots a_1}(n) \in \mathbf{Z}$，即

$$B_{a_k\cdots a_1}(n) \in \mathbf{Z}. \qquad (8.2.9)$$

下面只需证明

$$B_{a_{k-1}\cdots a_1}(n) \in \mathbf{Z}. \qquad (8.2.10)$$

由(8.2.3)式，有

$$3B_{a_k\cdots a_1}(n) + 1 = 2^{a_k} \cdot B_{a_{k-1}\cdots a_1}(n) \in \mathbf{Z}. \qquad (8.2.11)$$

又依定义，有

$$B_{a_{k-1}\cdots a_1}(n) = \frac{2^{a_{k-1}} \cdot B_{a_{k-2}\cdots a_1}(n) - 1}{3}, \qquad (8.2.12)$$

$$B_{a_{k-2}\cdots a_1}(n) = \frac{2^{a_{k-2}} \cdot B_{a_{k-3}\cdots a_1}(n) - 1}{3}, \qquad (8.2.13)$$

$\cdots$

$$B_{a_2 a_1}(n) = \frac{2^{a_2} \cdot B_{a_1}(n) - 1}{3}, \qquad (8.2.14)$$

$$B_{a_1}(n)=\frac{2^{a_1}\cdot B_{a_1}n-1}{3}. \qquad (8.2.15)$$

将以上各式自(8.2.15)式起从下而上依次代入到(8.2.12)式，并整理得

$$B_{a_{k-1}\cdots a_1}(n)=\frac{x}{3^{k-1}}, \qquad (8.2.16)$$

其中 $x\in \mathbf{Z}$，且

$$x=2^{a_{k-1}}\cdot(2^{a_{k-2}}\cdot(\cdots(2^{a_2}\cdot(2^{a_1}\cdot n-1)-3)\cdots)-3^{k-3})-3^{k-2}. \qquad (8.2.17)$$

将(8.2.16)式代入(8.2.11)式，得

$$3B_{a_k\cdots a_1}(n)+1=2^{a_k}\cdot B_{a_k\cdots a_1}(n)=2^{a_k}\cdot\frac{x}{3^{k-1}}\in \mathbf{Z}. \qquad (8.2.18)$$

上式中 $x\in \mathbf{Z}$，且因为2与3互素，故 $\frac{x}{3^{k-1}}\in \mathbf{Z}$. 于是 $B_{a_{k-1}\cdots a_1}(n)\in \mathbf{Z}$. 即(8.2.7)式成立.

i) 再证(8.2.4)式.

当 $2\leqslant i<j$ 时，依(8.2.3)式，有

$$3B_{a_i\cdots a_1}(n)+1=2^{a_i}\cdot B_{a_{i-1}\cdots a_1}(n). \qquad (8.2.19)$$

由(8.2.7)式知，上式右边为偶数，因而左边也必为偶数，于是 $B_{a_i\cdots a_1}(n)\in \mathbf{N}_d$. 而当 $i=1$ 时，由(8.2.1)式，有

$$3B_{a_1}(n)+1=2^{a_1}\cdot n, \qquad (8.2.20)$$

显然 $B_{a_1}(n)\in \mathbf{N}_d$. 于是(8.2.4)式得证.

(2) 再证明(8.2.5)式.

为此先需指出当 $1\leqslant i<j$ 时，有 $B_{a_{i+1}\cdots a_1}(n)\in \mathbf{N}_d$. 这是因为

i) 当 $1\leqslant i<j-1$ 即 $2\leqslant i+1<j$ 时，由(1)的证明知 $B_{a_{i+1}\cdots a_1}(n)\in \mathbf{N}_d$；

ii) 当 $i=j-1$ 时，由于等式

$$3B_{a_j\cdots a_1}(n)+1=2^{a_j}\cdot B_{a_{j-1}\cdots a_1}(n)$$

的右端为偶数，故 $B_{a_j\cdots a_1}(n)\in \mathbf{N}_d$.

由于当 $1\leqslant i<j$ 时 $B_{a_{i+1}\cdots a_1}\in \mathbf{N}_d$，则由

$$3B_{a_{i+1}\cdots a_1}(n)+1=2^{a_{i+1}}\cdot B_{a_i\cdots a_1}(n)$$

有

$$C(B_{a_{i+1}\cdots a_1}(n))=\frac{3B_{a_{i+1}\cdots a_1}(n)+1}{2^{a_{i+1}}}=B_{a_i\cdots a_1}(n),$$

其中 $B_{a_{i+1}\cdots a_1}(n)$ 和 $B_{a_i\cdots a_1}(n)$ 都是奇数. 于是(8. 2. 5)式成立.

(3) 最后证明(8. 2. 6)式. 由于 $B_{a_1}(n)\in \mathbf{N}_d$，依定义有

$$C(B_{a_1}(n))=\frac{3B_{a_1}(n)+1}{2^{a_1}}=\frac{2^{a_1}\cdot n}{2^{a_1}}=n,$$

即(8. 2. 6)式成立. 至此定理 8. 1 全部证毕.

定理8. 2 设 $B=B_{a_j\cdots a_1}(1)\in \mathbf{N}_d$，且 $a_1>2$，则 $h(B)=j$，且

$$T_{j+1}(B)=\{B_{a_j\cdots a_1}(1),\ B_{a_{j-1}\cdots a_1}(1),\ \cdots,\ B_{a_2,a_1}(1),\ B_{a_1}(1),\ 1\}.\tag{8. 2. 21}$$

证 在定理 8. 1 中令 $n=1$ 立即得到上式. 下证 $h(B)=j$.

(1) 由 $C(n)$ 的定义和(8. 2. 1)式，有

$$C(B_{a_1}(1))=\frac{3B_{a_1}(1)+1}{2^{a_1}}=1.\tag{8. 2. 22}$$

(2) 由于 $a_1>2$，则

$$B_{a_1}(1)=(2^{a_1}-1)/3\neq 1.\tag{8. 2. 23}$$

(3) $T_{j+1}(B)$ 中 $B_{a_1(1)}$ 前面的 $j-1$ 个元素都不为 1. 这是因为若它们中有某一个元素为 1，则由于 $C(1)=1$，必导致 $B_{a_1}(1)=1$，与(8. 2. 23)式的 $B_{a_1}(1)\neq 1$ 矛盾.

由(1)，(2) 和(3) 的证明并依定义可知 $h(B)=j$. 定理得证.

定义 8. 3 定义 $G(j)$ 表示长为 j 的序列 $\{a_j,\ a_{j-1},\ \cdots,\ a_2,\ a_1\}$ 的集合，其中 $a_i\in \mathbf{N}$，$a_1>2$，且满足下列同余关系：

$$
\left.\begin{array}{l}
2^{a_1} \equiv 1(\bmod 3), \\
\quad \not\equiv 1(\bmod 9), \\
2^{a_i} \cdot B_{a_{i-1}\cdots a_1}(1) \equiv 1(\bmod 3), \\
\qquad\qquad \not\equiv (\bmod 9),
\end{array}\right\} \quad (2 \leqslant i \leqslant j-1)
$$

$$
2^{a_j} \cdot B_{a_{j-1}\cdots a_1}(1) \equiv 1(\bmod 3).
$$

(8. 2. 24)

定理 8. 3 记$\{a_i\} = \{a_j, a_{j-1}, \cdots, a_1\}$. 则$B_{\{a_i\}}(1)$是高为$j$的奇数的充要条件是$\{a_i\} \in G(j)$.

证 先证必要性. 假设$B = B_{a_j\cdots a_1}(1)$是高为j的奇数. 依定理 8. 2，有

$T_{j+1}(B) = \{B_{a_j\cdots a_1}(1), B_{a_{j-1}\cdots a_1}(1), \cdots, B_{a_2a_1}(1), B_{a_1}(1), 1\}$,

其中$B_{a_1}(1) > 1$. 因此$a_1 > 2$. 下证(8. 2. 24)式成立.

依(8. 2. 1)和(8. 2. 3)式，有

$$
2^{a_1} - 1 = 3B_{a_1}(1), \qquad (8. 2. 25)
$$

$$
B_{a_2a_1}(1) = \frac{2^{a_2} \cdot B_{a_1}(1) - 1}{3}. \qquad (8. 2. 26)
$$

由(8. 2. 25)式知$2^{a_1} \equiv 1(\bmod 3)$;在(8. 2. 26)式中，因$B_{a_2a_1}(1)$为整数，有$B_{a_1}(1) \not\equiv 0(\bmod 3)$，再由(8. 2. 25)式知$2^{a_1} \not\equiv 1(\bmod 9)$. 于是(8. 2. 24)式的前两式成立.

同理可证(8. 2. 24)式的后三式也成立. 必要性得证.

再证充分性. 假设$\{a_i\} \in G(j)$，则$a_i \in \mathbf{N}$，$a_2 > 2$，且(8. 2. 24)式成立. 由(8. 2. 24)式的最后一式知$B_{\{a_i\}}(1)$即

$$
B_{a_j\cdots a_1}(1) = \frac{2^{a_j} \cdot B_{a_{j-1}\cdots a_1}(1) - 1}{3}.
$$

为整数. 再由定理 8. 1 和 8. 2 知$B_{\{a_i\}}(1)$是高为j的奇数. 充分性得证. 于是定理得证.

定义 8. 4 定义M表示高为有穷的所有大于 1 的奇数的集合，即

$$M = \{n \in \mathbf{N}_d,\ n > 1 \mid h(n) < \infty\}. \tag{8.2.27}$$

有了前面的定义和定理，我们可以得到以下重要的唯一性定理：

定理 8.4 对于每个 $n \in M$，存在唯一的序列 $\{a_i\} \in G$，使得

$$n = B_{a_{h(n)}\cdots a_1}(1). \tag{8.2.28}$$

反之，对于每个 $\{a_i\} \in G$，有 $B_{\{a_i\}}(1) \in M$.

证 如果 $n \in M$，定义正整数 a_i 为

$$a_i = e(C^{h-i}(n)) \quad (1 \leqslant i \leqslant h), \tag{8.2.29}$$

其中 e 为(8.1.1)式定义的函数，$h = h(n)$. 注意(8.2.28)式，并将

$$\{B_{a_h\cdots a_1}(1),\ B_{a_{h-1}\cdots a_1}(1),\ B_{a_{h-2}\cdots a_1}(1),\ \cdots,\ B_{a_1}(1),\ 1\} \tag{8.2.30}$$

与

$$T_{h+1}(n) = \{n,\ C^1(n),\ C^2(n),\ \cdots,\ C^{h-1}(n),\ 1\} \tag{8.2.31}$$

相比较可知 $n = B_{a_h\cdots a_1}(1)$，即(8.2.27)式成立. 又由定理 8.3 知 $\{a_i\} = \{a_h,\ a_{k-1},\ \cdots,\ a_1\} \in G$.

现证唯一性，假设又有

$$n = B_{b_k\cdots b_1}(1), \tag{8.2.32}$$

则由定理 8.2 知 $k = h(n)$，有

$$\begin{aligned} T_{h+1}(n) = \{&B_{b_h\cdots b_1}(1),\ B_{b_{h-1}\cdots b_1}(1), \\ &B_{b_{h-2}\cdots b_1}(1),\ \cdots,\ B_{b_1}(1),\ 1\} \\ = \{&B_{b_h\cdots b_1}(1),\ \frac{3B_{b_h\cdots b_1}(1)+1}{2^{b_h}}, \\ &\frac{3B_{b_{h-1}\cdots b_1}(1)+1}{2^{b_{h-1}}},\ \cdots,\ \frac{3B_{a_2a_1}(1)+1}{2^{b_2}},\ 1\}. \end{aligned} \tag{8.2.33}$$

将(8.2.32)或与(8.2.29)式相比较，利用两序列对应元素相

等可知 $b_i = a_1 (i = h, h-1, \cdots, 2, 1)$. 例如，利用前2项对应相等可推得 $b_h = a_h$，利用第2项和第3项对应相等可推得 $b_{h-1} = a_{h-1}$ 等等.

反之，若 $\{a_i\} = \{a_j, a_{j-1}, \cdots, a_1\} \in G(j)$，则由定理8. 3知 $B_{\{a_i\}}(1)$ 是高为 j 的奇数，故 $B_{\{a_i\}}(1) \in M$. 定理8. 4得证.

举例 令 $n = 17$，则

$$T_4(17) = \{C^0(17), C^1(17), C^2(17), C^3(17)\}$$

$$= \left\{17, \frac{3C^0(17)+1}{2^{e(C^0(17))}}, \frac{3C^1(17)+1}{2^{e(C^1(17))}}, \frac{3C^2(17)+1}{2^{e(C^2(17))}}\right\}$$

$$= \left\{17, \frac{3 \times 17 + 1}{2^2}, \frac{3 \times 13 + 1}{2^3}, \frac{3 \times 5 + 1}{2^4},\right\}$$

$$= \{17, 13, 5, 1\}.$$

$$h(17) = 3.$$

$$a_1 = e(C^{3-1}(17)) = e(C^2((17)) = e(5) = 4,$$

$$a_2 = e(C^{3-2}(17)) = e(C^1((17)) = e(13) = 3,$$

$$a_3 = e(C^{3-3}(17)) = e(C^2((17)) = e(17) = 2.$$

$$\{a_i\} = \{a_3, a_2, a_1\} = \{2, 3, 4\} \in G(3).$$

$$2^{a_1} = 16 \equiv 1(\mathrm{mod}3),$$

$$\not\equiv 1(\mathrm{mod}9),$$

$$2^{a_2} \cdot B_{a_1}(1) = 40 \equiv 1(\mathrm{mod}3),$$

$$\not\equiv 1(\mathrm{mod}9),$$

$$2^{a_3} \cdot B_{a_2 a_1}(1) = 52 \equiv 1(\mathrm{mod}3).$$

$$17 \to \{2, 3, 4, \cdots\}.$$

$$T_4(17) = \{B_{a_3 a_2 a_1}(1), B_{a_2 a_1}(1), B_{a_1}(1), 1\}$$

$$= \{17, 13, 5, 1\}.$$

$$1 = \frac{3B_{a_1}(1)+1}{2^{a_1}} = \frac{3B_{a_1}(1)+1}{2^4} \Rightarrow B_{a_1}(1) = 5,$$

$$5 = B_{a_1}(1) = \frac{3B_{a_2 a_1}(1)+1}{2^{a_2}}$$

$$= \frac{3B_{a_2a_1}(1)+1}{2^3} \Rightarrow B_{a_2a_1}(1) = 13,$$

$$13 = B_{a_2a_1}(1) = \frac{3B_{a_3a_2a_1}(1)+1}{2^{a_3}}$$

$$= \frac{3B_{a_3a_2a_1}(1)+1}{2^2} \Rightarrow B_{a_3a_2a_1}(1) = 17.$$

定义 8.5 设 $n \in \mathbf{N}_d$，记 $T(n) = \{C^0(n), C^1(n), C^2(n), \cdots\} = \{n_0, n_1, n_2, \cdots\}$. 则序列 $E(n) = \{e(n_0), e(n_1), e(n_2), \cdots\}$ 称为 n 的次方序列.

例如，$E(17) = \{2, 3, 4, \cdots\}$.

8.3 具有有限高的数

对于每一个 $n \in \mathbf{N}_d$，n 的高 $h(n)$ 要么为某一定数，如 $h(1) = 0$，$h(3) = 2$，$h(5) = 1$ 等等；要么为 ∞（目前还未找到例子）. 但反过来，当高 h（有限数）给定后，以 h 为高的自然数 n 却不是唯一的，例如，对任何 $k \in \mathbf{N}$，自然数 $n = (4^k - 1)/3$ 的高 $h(n) = 1$. 现在的问题是：对每一 $h \in \mathbf{N}$，是否存在 $n \in \mathbf{N}_d$，使得 $h(n) = h$? 回答是肯定的，并且同一个 $h \in \mathbf{N}$，对应无限多个 $n \in \mathbf{N}_d$，使得 $h(n) = h$. 本段就来讨论这样的问题.

引理 8.1 记 $\{a_i\} = \{a_j, a_{j-1}, \cdots, a_2, a_1\} \in G(j)$. 则

$$B_{a_j \cdots a_1}(1) < 2^{a_1+a_2+\cdots+a_j}/3^j. \tag{8.3.1}$$

证 对 j 用归纳法证明.

当 $j = 1$ 时，

$$B_{a_1}(1) = (2^{a_1} - 1)/3 < 2^{a_1}/3.$$

不等式成立.

假设(8.3.1)式成立. 则

$$B\, a_{j+1} \cdots a_1(1) = B_{a_{j+1}}(B_{a_j \cdots a_1}(1)) < B_{a_{j+1}}\left(\frac{2^{a_1+a_2+\cdots+a_j}}{3^j}\right)$$

$$= \left(2^{a_{j+1}} \cdot \frac{2^{a_1+a_2+\cdots+a_j}}{3^j} - 1\right) \Big/ 3$$

$$< \frac{2^{a_1+a_2+\cdots+a_{j+1}}}{3^{j+1}}.$$

引理得证.

定理 8. 5 定义

$$A_j(x) = \{(a_j, a_{j-1}, \cdots, a_1) \in G(j) \mid a_1 + a_2 + \cdots + a_j \leqslant x \in \mathbf{R}\}, \quad (8.3.2)$$

则

$$\# A_j(x) \geqslant (2[(x-2)/6j])^j, \quad (8.3.3)$$

其中$[x]$为不超过x的最大整数.

证 为方便证明，对$a_1, a_2, \cdots, a_j$作以下限制：

$$a_1 - 2 \leqslant (x-2)/j;\ a_i \leqslant (x-2)/j \quad (i = 2, 3, \cdots, j). \quad (8.3.4)$$

在此限制下，条件$a_1 + a_2 + \cdots + a_j \leqslant x$仍成立.

通过分析可知，每 6 个连续的自然数中至少有 2 个满足(8. 2. 24)式的前两式，即$2^{a_1} \equiv 1 \pmod 3$和$2^{a_1} \not\equiv 1 \pmod 9$. 因而在满足(8. 3. 4)式的限制条件$a_1 - 2 \leqslant (x-2)/j$的情况下，$a_1$的取法至少有$2[(x-2)/6j]$种. 同理可知，当$a_1$取定后，$a_2$的取法也至少有$2[(x-2)/6j]$种，…… 当$a_1, a_2, \cdots, a_{j-1}$取定后，$a_j$的取法也至少有$2[(x-2)/6j]$种. 于是$A_j(x)$中包含的元素(集合)的个数至少有$(2[(x-2)/6j])^j$个. 即(8. 3. 3)式成立. 定理得证.

注 为了得到(8. 3. 3)式同时为了计算的方便，我们在证明中用(8. 3. 4)式对$a_1, a_2, \cdots, a_j$进行了较强的限制，如果没有这个限制，则(8. 3. 3)式更加成立. 这说明(8. 3. 3)式所给出的$\# A_j(x)$的下界只是一个初步的结果. 读者将在第 9 节看到对$\# A_j(x)$下界的估计的进一步改进.

定理8. 5可用来估计区间$(1, x]$中具有给定高h的奇数个数

的下界，这就是以下定理.

定理 8.6 定义

$$M_h(x) = \#\{n \mid n \in M;\ n \leqslant x \in \mathbf{R} \text{ 且 } \mathrm{h(n)} = \mathrm{h}\}. \tag{8.3.5}$$

其中 M 由(8.2.27)式定义.则存在与 h 无关的常数 x_0，$r > 0$，使得当 $x > \max\{x_0, 2^{h/r}\}$ 时，有

$$M_h(x) > \frac{\log_2^h(x^r)}{h!}. \tag{8.3.6}$$

证 由定理 8.4 和本定理的条件，得

$$n = B_{a_h \cdots a_1}(1) \leqslant x, \tag{8.3.7}$$

再由引理 8.1 的结论(8.3.1)式，令

$$B_{a_h \cdots a_1}(1) < \frac{2^{a_1 + \cdots + a_h}}{3^h} \leqslant x, \tag{8.3.8}$$

得

$$a_1 + \cdots + a_h \leqslant \log_2(3^h x)(= z). \tag{8.3.9}$$

由定理 8.5 知，满足上式的序列 $\{a_h, a_{h-1}, \cdots, a_2, a_1\}(\in G(h))$ 的个数至少有 $(2[(z-2)/6h])^h$ 个.由定理 8.4 知每个这样的序列对应着一个唯一的奇数 $n = B_{a_h \cdots a_1}(1)$，且不同的序列对应不同的 n，因此有

$$M_h(x) \geqslant (2[(z-2)/6h])^h. \tag{8.3.10}$$

将 $z = \log_2(3^h x)$ 代入上式，并注意 $[x] > x - 1$，得

$$\begin{aligned} M_h(x) &\geqslant \left(2\left[\frac{\log_2(3^h \cdot x/4)}{6h}\right]\right)^h \\ &> \left(2\left(\frac{\log_2(3^h \cdot x/4)}{6h} - 1\right)\right)^h \\ &= h^{-h} \cdot \left(\frac{\log_2\left(\left(\dfrac{3}{64}\right)^h \cdot \dfrac{x}{4}\right)}{3}\right)^h \\ &= h^{-h} \cdot \left[\frac{h\log_2\left(\dfrac{3}{64}\right) + \log_2\left(\dfrac{x}{4}\right)}{3}\right]^h. \end{aligned} \tag{8.3.11}$$

选择常数 $x_0>0$，使得当 $x>x_0$ 时，$\frac{x}{4}>x^{\frac{1}{2}}$；并取常数 $r\in(0,1)$，使得

$$r\log_2\left(\frac{3}{64}\right)+\frac{1}{2}>3er. \tag{8.3.12}$$

注意 $x>2^{h/r}$ 与 $h<r\log_2 x$ 等价．于是当 $x>\max\{x_0,2^{h/r}\}$ 时，有

$$\begin{aligned}h\log_2\left(\frac{3}{64}\right)+\log_2\left(\frac{x}{4}\right)&>r\log_2 x\cdot\log_2\left(\frac{3}{64}\right)+\log_2 x^{\frac{1}{2}}\\&=\log_2 x^{r\log_2\left(\frac{3}{64}\right)+\frac{1}{2}}>\log_2 x^{3er}=3e\cdot\log_2 x^r.\end{aligned} \tag{8.3.13}$$

将上式代入(8.3.11)，并利用 Stirling 不等式

$$h!e^h>h^h \tag{8.3.14}$$

得

$$M_h(x)>h^{-h}\cdot\left(\frac{3e\log_2 x^r}{3}\right)^h>\frac{\log_2^h(x^r)}{h!}. \tag{8.3.15}$$

即(8.3.6)式成立．定理得证．

注 (1) 证明中选取 x_0，使得当 $x>x_0$ 时 $\frac{x}{4}>x^{\frac{1}{2}}$，可知

$$x_0\geqslant 16.$$

(2) 区间(0，1)满足(8.3.12)式的

$$r\in\left(0,\frac{1}{2(3e+6-\log_2 3)}\right)\subseteq(0,1).$$

(3) 最重要的，由已证明的不等式(8.3.6)式知，任取 $h\in\mathbf{N}$，则满足 $h(n)=h$ 的自然数不仅存在，且有无限多个．

引理 8.2[13] 对 $k\in\mathbf{N}$，有

$$\lim_{t\to\infty}e^{-t}\cdot\sum_{k=1}^{[t]}\frac{t^k}{k!}=\frac{1}{2}. \tag{8.3.16}$$

定理 8.7 定义

$$M(x)=\#\{n\mid n\in M;n\leqslant x\in R\text{ 且 }h(n)<\infty\}. \tag{8.3.17}$$

其中 M 由(8.2.27)式定义，则存在常数 $c>0$，使得对充分大的 x，有

$$M(x)>x^{c}. \tag{8.3.18}$$

证　由定理 8.6，我们能够找到 $x_0>0$ 和 $r>0$，使得当 $x>\max\{x_0, 2^{k/r}\}$ 时，有

$$M(x)=\sum_{k\in N}M_k(x)>\sum_{h=1}^{[r\log_2 x]}\frac{\log_2^h(x^r)}{h!}.$$

由引理 8.2 知

$$\lim_{x\to\infty}e^{-r\log_2 x}\cdot\sum_{h=1}^{[r\log_2 x]}\frac{\log_2^h(x^r)}{h!}=\frac{1}{2}.$$

即对于任给 $\varepsilon>0$，存在 $x_1>x_0$，使得当 $x>x_1$ 时，有

$$\left|e^{-r\log_2 x}\sum_{h=1}^{[r\log_2 x]}\frac{\log_2^h(x^r)}{h!}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon.$$

于是可选取 $c>0$，使得

$$M(x)>\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)e^{r\log_2 x}>\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)2^{r\log_2 x}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)x^{r}>x^{c}.$$

定理得证.

8.4 圈长

假设对每一奇数 $n>1$，$T(n)$ 有界：$C^k(n)\leqslant M$(常数)，且 $C^k(n)\neq n(k=1,2,\cdots)$，即除了 $C^k(n)=n$ 以外 n 不再出现在自身的轨迹中，则 3N + 1 猜想是正确的. 这是因为这时 $C^1(n)$，$C^2(n)$，…，$C^M(n)$ 这 M 个数中必至少有一个数为 1，否则，由于这 M 个数都属于区间$[2, M]$，依鸽笼原理知它们中必至少有两个数是相同的，与已知条件 $C^k(n)\neq n$ 矛盾. 于是有以下等价命题：

3N + 1 猜想的等价命题 8.2 若对每个奇数 $n>1$，$T(n)$ 有界，且 $C^k(n)\neq n(k=1,2,\cdots)$，则必存在 $k\in\mathbf{N}$，使得

$$C^k(n)=1.$$

若对某 $n\in\mathbf{N}_d$，存在 $k\in\mathbf{N}$，使得 $C^k(n)=n$，则必有 $C^{ik}(n)=n(i=1,2,\cdots)$，即数 n 周期性地出现在 $T(n)$ 中. 若 k 是使 $C^k(n)=n$ 的最小值，则称 k 为 $T(n)$ 的**周期**.

研究表明，若对某 $n\in\mathbf{N}_d$，$T(n)$ 的周期为 k，则 k 是相当大的.

设 $m,n\in\mathbf{N}_d$，$\{b_i\}=\{b_k,b_{k-1},\cdots,b_1\}$ 为正整数序列，且 $m=B_{b_kb_{k-1}\cdots b_1}(n)$. 定义

$$\left.\begin{aligned}&A_i=\sum_{j=k-i+1}^{k}b_j\quad(1\leqslant i\leqslant k).\\&A_0=0.\end{aligned}\right\}\qquad(8.4.1)$$

则有

$$2^{A_k}\cdot n-3^k\cdot m=\sum_{j=0}^{k-1}2^{A_j}\cdot 3^{k-1-j}.\qquad(8.4.2)$$

下面证明这一结果. 由于

$$\begin{aligned}m=B_{b_k\cdots b_1}(n)&=\frac{2^{b_k}\cdot B_{b_{k-1}\cdots b_1}(n)-1}{3}\\&=\frac{2^{b_k}}{3}B_{b_{k-1}\cdots b_1}(n)-\frac{1}{3}\\&=\frac{2^{b_k}}{3}\cdot\left(\frac{2^{b_{k-1}}}{3}\cdot B_{b_{k-2}\cdots b_1}(n)-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}\\&=\frac{2^{b_k}}{3}\cdot\left(\frac{2^{b_{k-1}}}{3}\cdot\left(\frac{2^{b_{k-2}}}{3}\cdot B_{b_{k-3}\cdots b_1}(n)-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}\\&\cdots\\&=\frac{2^{b_k}}{3}\cdot\left(\frac{2^{b_{k-1}}}{3}\cdot\left(\frac{2^{b_{k-2}}}{3}\cdot\left(\cdots\left(\frac{2^{b_3}}{3}\cdot\left(\frac{2^{b_2}}{3}\cdot B_{b_1}(n)\right.\right.\right.\right.\right.\\&\qquad\left.\left.\left.\left.\left.-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}\right)\cdots\right)-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$= \frac{2^{b_k+\cdots+b_2}}{3^{k-1}} \cdot B_{b_1}(n) - \frac{2^{b_k+\cdots+b_3}}{3^{k-2}} \cdot \frac{1}{3} - \frac{2^{b_k+\cdots+b_4}}{3^{k-3}} \cdot \frac{1}{3} - \cdots$$

$$- \frac{2^{b_k+b_{k-1}}}{3^2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{2^{b_k}}{3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2^{A_{k-1}}}{3^{k-1}} \cdot \frac{2^{b_1} \cdot n - 1}{3} - \frac{2^{A_{k-2}}}{3^{k-1}} - \frac{2^{A_{k-3}}}{3^{k-2}} - \cdots$$

$$- \frac{2^{A_2}}{3^3} - \frac{2^{A_1}}{3^2} - \frac{2^{A_0}}{3},$$

故

$$3^k \cdot m = 2^{A_k} \cdot n - 2^{A_{k+1}} - 3^2 \cdot 2^{A_{k-3}} - \cdots$$

$$- 3^{k-2} \cdot 2^{A_1} - 3^{k-1} \cdot 2^{A_0}$$

$$= 2^{A_k} \cdot n - \sum_{j=0}^{k-1} 2^{A_j} \cdot 3^{k-1-j}.$$

即(8. 4. 2)式成立.

注意，等式 $m = B_{b_k \cdots b_1}(n)$ 隐含 $C^k(m) = n$.

反过来，若(8. 4. 2)式对某单调递增整数序列

$$0 = A_0 < A_1 < A_2 < \cdots < A_k \qquad (8.4.3)$$

成立. 令

$$b_i = A_{k-i+1} - A_{k-i} \quad (i = 1, 2, \cdots, k),$$

可得
$$m = B_{b_k \cdots b_1}(n),$$

$$C^k(m) = n. \qquad (8.4.4)$$

上式表明 $n \in T(m)$. 这时若 $n \neq 1$，则 k 是使上式成立的最小迭代次数.

由以上的证明即得以下定理：

定理 8. 8 设 $m, n \in \mathbf{N}_d$. 则 $n \in T(m)$ 的充要条件是存在(8. 4. 3)的整数序列使得(8. 4. 2)式成立. 并且若这样的序列存在，则 $C^k(m) = n$.

推论 8. 1 如果 $1 < m \in \mathbf{N}_d$, $m \in T(m)$ 且 $T(m)$ 的周期是 k，则存在(8. 4. 3)的序列，使得

$$m(2^{A_k}-3^k)=\sum_{j=0}^{k-1}2^{A_j}\cdot 3^{k-1-j}. \qquad (8.4.5)$$

反之，若上式对(8.4.3)的序列成立，则 $m\in T(m)$，且

$$C^k(m)=m.$$

以上推论表明：$\frac{3^k}{2^{A_k}}\approx m$，即 $3^k\approx 2^{A_k}$，于是$\frac{A_k}{k}\approx\log_2 3=t$. 由于$\frac{A_k}{k}$是有理数，故将 $t=\log_2 3$ 表成连分数得

$$\begin{aligned}\log_2 3&=[n_0, n_1, n_2, \cdots, n_{49}, \cdots]\\&=[1, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 23, 2, 2, 1, 1,\\&\quad 55, 1, 4, 3, 1, 1, 15, 1, 9, 2, 5, 7, 1, 1,\\&\quad 4, 8, 1, 11, 1, 20, 2, 1, 10, 1, 4, 1, 1, 1,\\&\quad 1, 1, 37, 4, 55, 1, 1, 49, \cdots]. \qquad (8.4.6)\end{aligned}$$

再依关系式

$$p_{-1}=1,\ p_0=n_0,$$
$$q_{-1}=0,\ q_0=1,$$
$$p_i=n_ip_{i-1}+p_{i-2}\quad (i\in \mathbf{N}),$$
$$q_i=n_iq_{i-1}+q_{i-2}\quad (i\in \mathbf{N}),$$

求出 $t=\log_2 3$ 的第 i 收敛项或第 i 个渐近分数 p_i/q_i.

以下二引理可由有理逼近理论[13]得到：

引理 8.3 设 p_n/q_n 表示 $t=\log_2 3$ 的第 n 收敛项，则对于 $y<q_n$ 的任何整数对(x, y)，有

$$|p_n-q_nt|<|x-yt|.$$

引理 8.4 $t=\log_2 3$ 的第 n 收敛项 p_n/q_n 满足不等式

$$|p_-q_nt|>(q_n+q_{n+1})^{-1}.$$

引理 8.5 设 p_n/q_n 是 $t=\log_2 3$ 的第 n 收敛项，且 $y<q_m$，则

$$|2^x-3^y|>3^y\cdot\log 2|p_m-q_mt|.$$

证

$$|2^x - 3^y| = 3^y|\exp(x\log 2 - y\log 3) - 1|$$
$$> 3^y\log 2|x - yt|.$$

当 $y < q_m$ 时，由引理 8. 3 即得所要证的不等式.

有了以上的准备之后，现在集中讨论满足条件 $m > 1$ 且 $m \in T(m)$ 的奇数 m.

引理 8. 6 如果 $1 < m = \inf\{C^1(m), C^2(m), \cdots\}$，则

$$2^{A_j} \leqslant \left(3 + \frac{1}{m}\right)^j. \qquad (8.4.7)$$

这里 A_j 如同(8. 4. 1)式中的 A_i.

证 由已知，有

$$C^j(m) = \frac{3C^{j-1}(m) + 1}{2^{e(C^{j-1}(m))}} = \frac{C^{j-1}(m)\left(3 + \frac{1}{C^{j-1}(m)}\right)}{2^{e(C^{j-1}(m))}}$$

$$\leqslant \frac{C^{j-1}(m)\left(3 + \frac{1}{m}\right)}{2^{e(C^{j-1}(m))}},$$

$$m \leqslant C^j(m) \leqslant \frac{C^{j-1}(m)\left(3 + \frac{1}{m}\right)}{2^{e(C^{j-1}(m))}}$$

$$\leqslant \frac{C^{j-2}(m)\left(3 + \frac{1}{m}\right)}{2^{e(C^{j-2}(m))}} \cdot \frac{3 + \frac{1}{m}}{2^{e(C^{j-1}(m))}}$$

$$= \frac{C^{j-2}(m)\left(3 + \frac{1}{m}\right)^2}{2^{e(C^{j-2}(m)) + e(C^{j-1}(m))}} \leqslant \cdots$$

$$\leqslant \frac{C^0(m)\left(3 + \frac{1}{m}\right)^j}{2^{e(C^0(m)) + e(C^1(m)) + \cdots + e(C^{j-1}(m))}}$$

$$= \frac{m \cdot \left(3 + \frac{1}{m}\right)^j}{2^{A_j}},$$

故有

$$2^{A_j} \leqslant \left(3+\frac{1}{m}\right)^j.$$

于是引理得证.

引理 8.7 如果 $1 < m = \inf\{C^1(m), C^2(m), \cdots\}$ 且 k 是 $T(m)$ 的周期，则

$$m < k\left(3+\frac{1}{m}\right)^{k-1} \Big/ (2^{A_k} - 3^k). \qquad (8.4.8)$$

证 由推论 8.1 和引理 8.6，得

$$\begin{aligned} m(2^{A_k} - 3^k) &= \sum_{j=0}^{k-1} 2^{A_j} \cdot 3^{k-1-j} \leqslant \sum_{j=0}^{k-1}\left(3+\frac{1}{m}\right)^j \cdot 3^{k-1-j} \\ &< \sum_{j=0}^{k-1}\left(3+\frac{1}{m}\right)^j \cdot \left(3+\frac{1}{m}\right)^{k-1-j} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1}\left(3+\frac{1}{m}\right)^{k-1} = k\left(3+\frac{1}{m}\right)^{k-1}, \end{aligned}$$

故有

$$m < k\left(3+\frac{1}{m}\right)^{k-1} \Big/ (2^{A_k} - 3^k).$$

由此即得(8.4.8)式．引理得证.

以上这些引理使我们能够建立可能的循环轨迹的周期大小与 $t = \log_2 3$ 的连分数之间的联系. 这就是以下的定理.

定理 8.9 设 p_n/q_n 是 $t = \log_2 3$ 的第 n 收敛项，$1 < m = \inf\{C^1(m), C^2(m), \cdots\}$ 且 k 是 $T(m)$ 的周期，则对于 $4 \leqslant n \in \mathbf{N}$，有

$$k > \min\{q_n, 2m/(q_n + q_{n+1})\}. \qquad (8.4.9)$$

证 如果 $k > q_n$，则上式成立. 假设 $k \leqslant q_n$. 由引理 8.5 知

$$|2^{A_k} - 3^k| = 2^{A_k} - 3^k > 3^k \cdot \log 2|p_n - q_n t|.$$

再由引理 8.6 知

$$m < \frac{k\left(3+\frac{1}{m}\right)^{k-1}}{2^{A_k} - 3^k} < \frac{k\left(3+\frac{1}{m}\right)^{k-1}}{3^k \cdot \log 2|p_n - q_n t|}.$$

于是有

$$k > m \cdot \log 2 \cdot \left(3 + \frac{1}{m}\right) \cdot |p_n - q_n t| \cdot \left(1 - \frac{k}{3m}\right).$$

当 $n \geqslant 4$ 时，由(8. 4. 6)式知 $q_n + q_{n+1} > 20$. 因此，如果 $k \geqslant \frac{m}{10}$，则 $k > 2m/(q_n + q_{n+1})$，(8. 4. 9)式成立. 故假设 $k < \frac{m}{10}$. 则 $(1 - k/3m) > \frac{29}{30}$，由引理 8. 4，得

$$k > \frac{(3m+1)\log 2}{q_n + q_{n+1}} \cdot \frac{29}{30} > \frac{2m}{q_n + q_{n+1}}.$$

综上可知(8. 4. 9)式成立. 定理得证.

推论 8. 2 对于给定的 $k \in \mathbf{N}$，只有有限多个 $n \in \mathbf{N}_d$，其循环轨迹以 k 为周期.

根据定理 8. 9 和 3N + 1 猜想至少在区间$[1, 10^{12}]$已被验证的事实，可以估计循环周期 k 的下界. 这就是下面的定理：

定理 8. 10 设 $1 < m = C^k(m)$，则 $k > 31867$.

证 因为 $1 < m = C^k(m)$，所以 $T(m)$ 是无限循环的，且存在 $m_0 > 10^{12}$，使得 $m_0 = \inf\{C^1(m), C^2(m), \cdots\}$. 由于 $m_0 = C^k(m_0)$，则 k 大于或等于 $T(m_0)$ 的周期. 故由定理 8. 9 知，当 $n \geqslant 4$ 时，有

$$k > \min\{q_n, 2 \cdot 10^{12}/(q_n + q_{n+1})\}. \qquad (8. 4. 10)$$

而由(8. 4. 6)式可算出当 $n = 10$ 时，有

$$q_{10} = 31867; \quad q_{11} = 79335.$$

将它们代入(8. 4. 10)式得

$$k > \min\{31867, 17985288\} = 31867.$$

定理得证.

以上定理表明，若某奇数 n 的轨迹序列 $T(n)$ 出现了圈，则此圈的长度至少是 31867. 这不是不可能的，只要 3N + 1 猜想不成立.

9 压缩迭代(续)

如上节所述，要研究 3N + 1 猜想，只需考察奇数 n(即 $n \in \mathbf{N}_d$) 的压缩迭代就行了，因而考察对象减少了一半. 本节是上节讨论的继续. 读者首先将看到，需考察的奇数范围还可大大缩小. 在接下的内容中将讨论对 $\# A_j(x)$ 下界估计的改进，并利用其结果对 $M_n(x)$ 和 $M(x)$ 作出更好的估计.

9.1 可无限缩小的考察范围

引理 9.1 如果 $n \in \mathbf{N}_d$, 则 $h(4n+1) = h(n)$.

证 因为

$$C(4n+1)=\frac{3(4n+1)+1}{2^{e(4n+1)}}=\frac{4(3n+1)}{2^{e(4n+1)}}$$

$$=\frac{4(3n+1)}{2^{e(n)+2}}=\frac{3n+1}{2^{e(n)}}=C(n).$$

故 $h(4n+1) = h(n)$. 引理得证.

引理 9.2 对任一 $n \in \mathbf{N}_d$, 定义 $D(n) = 4n + 1$, 且令

$$D^0(n) = n$$

$$D^k(n) = D(D^{k-1}(n)) \quad (k = 1, 2, 3, \cdots),$$

则有

$$D^k(n) \equiv \sum_{i=0}^{k} 2^{2i} (\mathrm{mod}\, 2^{2k+1}). \qquad (9.1.1)$$

证 对 k 用归纳法证明.

(i) 当 $k = 0$ 时, $D^0(n) = n \equiv 1(\mathrm{mod}\, 2^1)$, (9.1.1)式成立.

(ii) 假设(9.1.1)式成立. 则

$$D^{k+1}(n) = D(D^k(n)) = 4D^k(n) + 1$$
$$= 4\left(\sum_{i=0}^{k} 2^{2i} + t \cdot 2^{2k+1}\right) + 1,$$

其中 t 为某整数. 上式可写为

$$D^{k+1}(n) = \sum_{i=0}^{k+1} 2^{2i} + t \cdot 2^{2(k+1)+1}$$
$$= \sum_{i=0}^{k+1} 2^{2i} (\bmod 2^{2(k+1)+1}). \qquad (9.1.2)$$

上式表明(9.1.1)式中的 k 可代之以 $k+1$. 由(i)和(ii), 引理得证.

注意. 由于

$$\sum_{i=0}^{k} 2^{2i} = \frac{2^{2k+2}-1}{3},$$

将其代入(9.1.1)式, 得

$$D^k(n) \equiv \frac{2^{2k+2}-1}{3} (\bmod 2^{2k+1}). \qquad (9.1.3)$$

又显然 $D^k(n) \in \mathbf{N}_d (k = 0, 1, 2, \cdots)$.

定理 9.1 设对于某数 $m \in \mathbf{N}$ 和对于所有的 $n \equiv (2^{2m} - 1)/3 (\bmod 2^{2m-1})$ 有 $h(n) < \infty$. 则对每个 $n \in \mathbf{N}_d$, 有 $h(n) < \infty$.

证 任取一 $n \in \mathbf{N}_d$. 令 $k = m - 1$ 代入(9.1.3)式, 得

$$D^{m-1}(n) = \frac{2^{2m}-1}{3} (\bmod 2^{2m-1}),$$

且有

$$h(D^{m-1}(n)) < \infty. \qquad (9.1.4)$$

由于

$$D^{m-1}(n) = D(D^{m-2}(n)) = 4D^{m-2}(n) + 1,$$

由引理 9.1, 有

$$h(D^{m-1}(n)) = h(D^{m-2}(n)).$$

继续利用引理 9.1, 最后可得

$$h(D^{m-1}(n)) = h(D^0(n)) = h(n). \qquad (9.1.5)$$

比较上式和(9. 1. 4)，知 $h(n)<\infty$. 定理得证.

定理 9. 1 说明，在以下各奇数组中任取一组，若该组中的每个奇数满足 3N + 1 猜想，则全体奇数都满足 3N + 1 猜想：

形如 $n=1+2t$ 的奇数：1, 3, 5, 7, 9, …

形如 $n=5+8t$ 的奇数：5, 13, 21, 29, 37, …

形如 $n=21+32t$ 的奇数：21, 53, 85, 117, 149, …

形如 $n=85+128t$ 的奇数：85, 213, 341, 469, 597, …

…

可见，根据定理 9. 1，为证明 3N + 1 猜想而只需考察的奇数范围可以无限缩小.

9. 2　对 $\#A_j(x)$ 下界估计的改进

这 $A_j(x)$ 所表示的集合已在(8. 3. 2)式给出，(8. 3. 3)式便是对 $\#A_j(x)$ 下界的估计. 由于这种估计是建立在人为的较强的限制条件(8. 3. 4)式下作出的，因而只是一种粗略的估计. 现在我们将条件(8. 3. 4)去掉，而代之以较弱的限制条件，以取得一个比较好的估计.

定理 9. 2　设 $x, j\in \mathbf{N}$，$x\equiv j(\bmod 3)$ 且 $x\geqslant c\cdot j$，则

$$\#A_j(x)\geqslant \frac{2}{5}\binom{(x-j)/3}{j}. \qquad (9.\ 2.\ 1)$$

其中 $c=\frac{1}{4}(13+\sqrt{153})$.

证　为清楚起见，先将定义 8. 3 中的 $G(j)$ 用以下与之等价的形式描述：

$$G(j)=\{\{a_j, a_{j-1}, \cdots, a_1\}\mid a_i\in \mathbf{N}, a_1>2,$$
$$\text{且(9. 2. 2)式成立}\},$$

其中(9. 2. 2)式即为

$$2^{a_1}\equiv 4, 7(\bmod 9),$$

$$2^{a_i}\cdot B_{a_{i-1}\cdots a_1}(1)\equiv 4,\ 7(\mathrm{mod}9)\ (2\leqslant i\leqslant j-1).$$

$$2^{a_j}\cdot B_{a_{j-1}\cdots a_1}(1)\equiv 1(\mathrm{mod}3).$$

(9. 2. 2)

上式与(8. 2. 24)式是等价的.

再建立以下的乘法表(mod9)：

a	2^a	1	2	4	5	7	8
0	1	1	2	4	5	7	8
1	2	2	4	8	1	5	7
2	4	4	8	7	2	1	5
3	8	8	7	5	4	2	1
4	7	7	5	1	8	4	2
5	5	5	1	2	7	8	4

又，令

$\widetilde{G}(j)=\{(a_j,\ a_{j-1},\ \cdots,\ a_1)\mid a_i\in\mathbf{N},\ 2^{a_1}\equiv 4,\ 7(\mathrm{mod}9)$;

当 $2\leqslant i\leqslant j$ 时，$2^{a_j}\cdot B_{a_{i-1}\cdots a_1}(1)\equiv 4,\ 7(\mathrm{mod}9)\}$,

$I_k=\{6k-5,\ 6k-4,\ 6k-3,\ 6k-2,\ 6k-1,\ 6k\}\ (k\in\mathbf{N})$.

由乘法表(mod9)看出，每6个连续的自然数中满足 $\widetilde{G}(j)$ 中条件 $2^{a_1}\equiv 4,\ 7(\mathrm{mod}9)$ 的 a_1 恰有2个；又对每个 $i(2\leqslant i\leqslant j)$，每6个连续的自然数中满足 $\widetilde{G}(j)$ 中条件 $2^{a_i}\cdot B_{a_{i-1}\cdots a_1}(1)\equiv 4,\ 7(\mathrm{mod}9)$ 的 a_i 也恰有2个（注意 $B_{a_{i-1}\cdots a_1}(1)\not\equiv 0(\mathrm{mod}3)$，$B_{a_{i-1}\cdots a_1}(1)$ 只能取1，2，4，5，7，8(mod9)这6个数之一）. 于是对每个 $a_i\in\mathbf{N}$，令 $k=[a_i/6]$，则在集合

$$I_{k_i}=\{6k_i-5,\ 6k_i-4,\ 6k_i-3,\ 6k_i-2,\ 6k_{i-1}-1,\ 6k_i\}$$

中必有2个数可取作 a_i：一个记为 a_{i_1}，另一个记为 a_{i_2}，$a_{i_1}<a_{i_2}$.

现令 $\mathbf{N}_3=\{3k-1\mid k\in\mathbf{N}\}$，并定义映射 $\varphi_j:\widetilde{G}(j)\to\mathbf{N}_3^j$：

$$\varphi_j(a_j,\ a_{j-1},\ \cdots,\ a_1)=(b_j,\ b_{j-1},\ \cdots,\ b_1),$$

其中对 $1\leqslant i\leqslant j$

$$b_i = \begin{cases} 6k_i - 4, & \text{当 } a_i = a_{i_1}, \\ 6k_i - 1, & \text{当 } a_i = a_{i_2}. \end{cases}$$

易知映射 φ_j 是双射. 又由乘法表(mod9)可知 $|a_{i_1} - a_{i_2}| \geqslant 2$，因此 $|b_i - a_i| \leqslant 2$.

由上可以得到

$$\begin{aligned}
\# A_j(x) = & \#\{\{a_j, a_{j-1}, \cdots, a_1\} \in G(j) | a_1 + a_2 + \cdots + a_j \leqslant x \\
& \geqslant \#\{\{a_j, a_{j-1}, \cdots, a_1\} \in \tilde{G}(j) | a_1 > 2, a_1 \\
& \quad + a_2 + \cdots + a_j \leqslant x\} \\
& = \#\{\{b_j, b_{j-1}, \cdots, b_1\} \in \mathbf{N}_3^j | b_1 > 2, b_1 \\
& \quad + b_2 + \cdots + b_j \leqslant x\} \\
& = \#\{\{k_j, k_{j-1}, \cdots, k_1\} \in \mathbf{N}^j | k_1 > 1, (3k_1 - 1) + \cdots \\
& \quad + (3k_j - 1) \leqslant x - 2j\} \\
& = \#\{\{k_j, k_{j-1}, \cdots, k_1\} \in \mathbf{N}^j | k_1 > 1, k_1 + \cdots \\
& \quad + k_j \leqslant (x - j)/3\}.
\end{aligned}$$

利用组合学基本等式

$$\#\{\{k_j, k_{j-1}, \cdots, k_1\} \in \mathbf{N}^j | k_1 + k_2 + \cdots + k_j \leqslant n \leqslant \binom{n}{j}$$

得

$$\begin{aligned}
\# A_j(x) = & \#\{\{k_j, k_{j-1}, \cdots, k_1\} \in \mathbf{N}^j | k_1 + k_2 + \cdots \\
& \quad + k_j \leqslant (k - j)/3\} \\
& - \#\{\{k_j, k_{j-1}, \cdots, k_2\} \in \mathbf{N}^{j-1} | k_2 + k_3 \\
& \quad + \cdots + k_j \leqslant (x - j)/3 - 1\} \\
& = \binom{(x-j)/3}{j} - \binom{(x-j)/3 - 1}{j}.
\end{aligned}$$

由 $x \geqslant c \cdot j$, $c = \frac{1}{4}(13 + \sqrt{153}$, 得 $x \geqslant c \cdot j \geqslant 6j$, $(x - j)/3 \geqslant 5j/3$，故有

$$\# A_j(x) \geqslant \frac{2}{5}\binom{(x-j)/3}{j}.$$

即(9. 2. 1)式成立. 定理 9. 2 得证.

推论 9. 1 设 $j\in \mathbf{N}$, $x\in \mathbf{R}$, 且 $x\geqslant c\cdot j+3$, 则存在 $x'\in \mathbf{N}$, 使得 $x-3<x'\leqslant x$, $x'\equiv j(\bmod 3)$, 且

$$\# A_j(x)\geqslant \frac{2}{5}\binom{(x'-j)/3}{j}. \qquad (9.2.3)$$

证 可以找到整数 t 满足

$$c\cdot j\leqslant x-3<j+3t\leqslant x. \qquad (9.2.4)$$

这是因为由上式有

$$\frac{c\cdot i-j}{3}<t\leqslant \frac{x-j}{3}.$$

由于

$$\frac{x-j}{3}-\frac{c\cdot j-j}{3}=\frac{x-c\cdot j}{3}\geqslant 1,$$

于是可取 $t=\left[\frac{x-i}{3}\right]$满足(9. 2. 4)式. 再取 $x'=j+3t\in \mathbf{N}$, 则有 $x-3<x'\leqslant x$, $x'\equiv j(\bmod 3)$, 且

$$\# A_j(x)\geqslant \# A_j(x')\geqslant \frac{2}{5}\binom{(x'-j)/3}{j}.$$

即(9. 2. 3)式成立. 推论得证.

9. 3 对 $M_h(x)$ 和 $M(x)$ 的进一步估计

上段对 $\# A_j(x)$ 的下界估计的改进为更好地估计两个函数

$$M_h(x)=\#\{n\mid n\in M,\ n\leqslant x\in \mathbf{R},\ h(n)=h\} \qquad (9.3.1)$$

和

$$M(x)=\#\{n\mid n\in M,\ n\leqslant x\in \mathbf{R},\ h(n)<\infty\} \qquad (9.3.2)$$

的值提供了依据. 本段首先改进对 $M_h(x)$ 的估计, 然后给出对 $M(x)$ 的比较好的估计.

引理 9.3 设 $x > -1$，

(1) 若 $0 < \alpha < 1$，则有

$$(1+x)^{\alpha} \leqslant 1 + \alpha x. \tag{9.3.3}$$

(2) 若 $\alpha < 0$ 或 $\alpha > 1$，则有

$$(1+x)^{\alpha} \geqslant 1 + \alpha x. \tag{9.3.4}$$

仅当 $x = 0$ 时两式中的等号成立.

证 设 $x > -1$ 且 $0 < \alpha < 1$. 令

$$f(x) = (1+x)^{\alpha} - 1 - \alpha x.$$

两边对 x 求导，有

$$f'(x) = \alpha[(1+x)^{\alpha-1} - 1]\begin{cases} > 0, & \text{当 } -1 < x < 0; \\ < 0, & \text{当 } x > 0. \end{cases}$$

可见当 $-1 < x < 0$ 时 $f(x)$ 单调增；当 $x > 0$ 时 $f(x)$ 单调减；又 $f(0) = 0$. 故 $f(x) \leqslant 0$ 且仅当 $x = 0$ 时等号成立. 于是(9.3.3)式得证.

(9.3.4)式可类似证明.

以上是用高等数学方法证明引理 9.3 的. 考虑有的读者需要，现在再用初等数学方法证明一遍.

(1) 设 $x > -1$ 且 $0 < \alpha < 1$.

1° 设 α 为有理数. 令 $\alpha = \frac{m}{n}$，其中 m，n 为正整数，且 $1 \leqslant m < n$. 利用算术平均值与几何平均值不等式

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqslant (a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}}$$

(其中 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 为正数，仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时等号成立)得

$$\begin{aligned}(1+x)^{\alpha} &= (1+x)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(1+x)^m \cdot 1^{n-m}} \\ &= \sqrt[n]{\underbrace{(1+x)(1+x)\cdots(1+x)}_{m\text{个}(1+x)} \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdots 1}_{(n-m)\text{个}1}} \\ &\leqslant \frac{m(1+x) + n - m}{n} = \frac{n + mx}{n}\end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{m}{n}x = 1 + \alpha x.$$

上式仅当 $1 + x = 1$ 即 $x = 0$ 时等号成立. 若 $x \neq 0$, 则

$$(1 + x)^\alpha < 1 + \alpha x.$$

2° 设 α 为无理数, 令有理数列 $\{r_n\}$ 以 α 为极限, 其中 $0 < r_n < 1$, 由 1° 知

$$(1 + x)^{r_n} \leqslant 1 + r_n x \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

对上式两边取 $n \to \infty$ 的极限, 得

$$(1 + x)^\alpha = \lim_{n \to \infty}(1 + x)^{r_n} \leqslant \lim_{n \to \infty}(1 + r_n x) = 1 + \alpha x.$$

即(9. 3. 3)式成立, 且当 $x = 0$ 时, 取等号.

在此还需证明当 $x \neq 0$ 时, $(1 + x)^\alpha < 1 + \alpha x$. 为此设有理数 r 满足不等式 $\alpha < r < 1$, 有 $0 < \frac{\alpha}{r} < 1$, 且由已证明的结果有

$$(1 + x)^\alpha = [(1 + x)^{\frac{\alpha}{r}}]^r \leqslant \left(1 + \frac{\alpha}{r}x\right)^r.$$

若 $x \neq 0$, 则利用 1°, 有

$$\left(1 + \frac{\alpha}{r}x\right)^r < 1 + r \cdot \frac{\alpha}{r}x = 1 + \alpha x.$$

故 $(1 + x)^\alpha < 1 + \alpha x$. 于是(9. 3. 3)式成立. 且仅当 $x = 0$ 时取等号.

(2) 设 $x > -1$ 且 $\alpha < 0$.

1° 若 $1 + \alpha x < 0$, 则(9. 3. 4)式显然成立.

2° 若 $1 + \alpha x \geqslant 0$, 则可取一正整数 n 使得 $-\frac{\alpha}{n} < 1$, 由(9. 3. 3)式得

$$(1 + x)^{-\frac{\alpha}{n}} \leqslant 1 - \frac{\alpha}{n}x,$$

$$(1 + x)^{\frac{\alpha}{n}} \geqslant \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{n}x} \geqslant 1 + \frac{\alpha}{n}x,$$

$$(1+x)^{\alpha} \geqslant \left(1+\frac{\alpha}{n}x\right)^{n} \geqslant 1+n\cdot\frac{\alpha}{n}x = 1+\alpha x.$$

(9. 3. 4) 式成立，且仅当 $x=0$ 时取等号.

(3) 设 $x>-1$ 且 $\alpha>1$.

1° 若 $1+\alpha x<0$，则(9. 3. 4) 式显然成立.

2° 若 $1+\alpha x\geqslant 0$，则由(9. 3. 3) 式，得

$$(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant 1+\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha x = 1+x,$$

$$1+\alpha x \leqslant (1+x)^{\alpha}.$$

即(9. 3. 4) 式成立，且仅当 $x=0$ 时取等号.

综合(1)，(2) 和(3)，引理 9. 3 得证.

注 本定理的两个不等式称为伯努利(Bernoulli)不等式.

定理 9. 3 若 x 满足 $\log_2 x \geqslant (c-\log_2 3)h+3$，则

$$M_h(x) > \frac{2}{5h!}\log_2^h\left(x^{C_1(1-3(\log_2 x)^{-1})}\right), \qquad (9.\ 3.\ 5)$$

其中

$$c=\frac{1}{4}(13+\sqrt{153}),\ c_1=(c-\log_2 3)^{-1}.$$

证 由定理 8. 3 和 8. 4，有

$$M_h(x) = \#\{\{a_h, a_{h-1}, \cdots, a_1\}\in G(h)\,|\,B_{a_h a_{h-1}\cdots a_1}(1)\leqslant x\}.$$

由引理 8. 1 知

$$B_{a_h a_{h-1}\cdots a_1}(1) < 2^{a_1+\cdots+a_h}/3^h.$$

令
$$2^{a_1+\cdots+a_h}/3^h \leqslant x,$$

得
$$a_1+\cdots+a_h \leqslant \log_2(3^h x).$$

于是有

$$\begin{aligned} M_h(x) \geqslant\ & \#\{\{a_h, a_{h-1}, \cdots, a_1\}\in G(h)\,|\,a_1+\cdots+a_h\leqslant \log_2(3^h x)\} \\ & = \# A_h(\log_2(3^h x)). \end{aligned}$$

依假设 $\log_2 x \geqslant (c-\log_2 3)h+3$，有

$$\log_2(3^h x) \geqslant ch + 3.$$

由推论 9. 1 知，存在 $x' \in \mathbf{N}$，$x' \equiv h(\mathrm{mod}3)$，满足

$$\log_2(3^h x) - 3 < x' \leqslant \log_2(3^h x), \qquad (9.3.6)$$

且有

$$M_h(x) \geqslant \# A_h(\log_2(3^h x)) \geqslant \# A_h(x')$$
$$\geqslant \frac{2}{5}\binom{(x'-h)/3}{h}. \qquad (9.3.7)$$

设 $z \in \mathbf{N}$ 满足 $z > h > 0$，有

$$\log\left(\frac{z!}{(z-h)!}\right) = \sum_{i=0}^{h-1}\log(z-i) > \int_{z-h}^{z}\log t\,\mathrm{d}t$$
$$= z\log z - (z-h)\log(z-h) - h. \qquad (9.3.8)$$

因为

$$\log(z-h) = \log z + \log\left(1 - \frac{h}{z}\right) < \log z - \frac{h}{z} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{z}\right)^2,$$

由(9. 3. 8)式，有

$$\log\left(\frac{z!}{(z-h)!}\right) > h\left(\log z - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{h}{z}\right)\frac{h}{z}\right). \qquad (9.3.9)$$

令

$$z = (x' - h)/3. \qquad (9.3.10)$$

由(9. 3. 6)式，有

$$z > \frac{c-1}{3}h > h.$$

由(9. 3. 9)式，有

$$\log\left(\frac{z!}{(z-h)!}\right) > h\left(\log z - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{c-1}\right)\frac{h}{2}\right)$$
$$= h\left(\log z - c_2 \cdot \frac{h}{z}\right), \qquad (9.3.11)$$

其中 $c_2 = (c+2)/(2c-2)$.

由 $\log\left(1 - \frac{h}{2}\right)$ 的 Taylor 展开式可知

$$\log\left(1-\frac{h}{2}\right)<-\frac{h}{2},$$

$$c_2\log\left(1-\frac{h}{z}\right)<-c_2\cdot\frac{h}{z}.$$

由(9. 3. 10)式知

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{z!}{(z-h)!}\right)&>h\left(\log z-c_2\cdot\frac{h}{z}\right)\\&>h\left(\log z+c_2\log\left(1-\frac{h}{z}\right)\right)\\&=h\log\left(z\left(1-\frac{h}{z}\right)^{c_2}\right).\end{aligned}\qquad(9.\ 3.\ 12)$$

由(9. 3. 4)式，有

$$\left(1-\frac{h}{z}\right)^{c_2}>1-c_2\cdot\frac{h}{z}.$$

由(9. 3. 12)式，有

$$\log\left(\frac{z!}{(z-h)!}\right)>h\log(z-c_2h)=\log(z-c_2h)^h,$$

即

$$\frac{z!}{(z-h)!}>(z-c_2h)^h,$$

$$h!\binom{z}{h}>(z-c_2h)^h.\qquad(9.\ 3.\ 13)$$

将(9. 3. 10)式代入上式，得

$$h!\binom{(x'-h)/3}{h}>\left(\frac{x'-h}{3}-c_2h\right)^h.\qquad(9.\ 3.\ 14)$$

由(9. 3. 6)式和本定理的已知条件，得

$$\begin{aligned}3\left(\frac{x'-h}{3}-c_2h\right)&\geqslant\log_2(3^hx)-3-(3c_2+1)h\\&=\log_2x-h(3c_2+1-\log_23)-3\\&\geqslant(\log_2x-3)(1-c_1(3c_2+1-\log_23))\end{aligned}$$

$$= 3c_1\log_2 x - 9c_1.$$

即

$$\left(\frac{x'-h}{3} - c_2 h\right)^h = (c_1\log_2 x - 3c_1)^h, \quad (9.3.15)$$

$$\binom{(x'-h)/3}{h} > \frac{(c_1\log_2 x - 3c_1)^h}{h!}. \quad (9.3.16)$$

由(9. 3. 7)式和(9. 3. 16)式，得

$$M_h(x) > \frac{2}{5h!}(c_1\log_2 x - 3c_1)^h$$

$$= \frac{2}{5h!}(c_1\log_2 x - 3c_1\log_2 x^{(\log_2 x)^{-1}})^h$$

$$= \frac{2}{5h!}\log_2^h x^{c_1(1-3(\log_2 x)^{-1})},$$

即(9. 3. 5) 式成立. 于是定理 9. 3 终于得证.

利用定理 9. 3 对 $M_h(x)$ 下界的改进，可以得到对 $M(x)$ 的下界的比较好的估计，这就是以下定理.

定理 9. 4 存在一绝对正常数 x_0，使得当 $x > x_0$ 时有

$$M(x) = \#\{n \mid n \in M, n \leqslant x \in R, h(n) < \infty\} > x^{3/10}. \quad (9.3.17)$$

证 由引理 8. 2 的极限

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t}\sum_{k=1}^{[t]}\frac{t^k}{k!} = \frac{1}{2}$$

可知

$$\lim_{x\to\infty} e^{-\log_2 x^{(1-\alpha)c_1}} \cdot \sum_{h=1}^{[(1-\alpha)c_1\cdot\log_2 x]} \cdot \frac{\log_2^h x^{(1-\alpha)c_1}}{h!} = \frac{1}{2},$$

其中 $0 < \alpha < 1$. 故存在实常数 $x_0 > 0$，使得当 $x > x_0$ 时，有

$$\sum_{h=1}^{[(1-\alpha)c_1\cdot\log_2 x]} \frac{1}{h!}\cdot\log_2^h x^{(1-\alpha)c_1} > \frac{1}{4}e^{\log_2 x^{(1-\alpha)c_1}}. \quad (9.3.18)$$

由定理 9. 3，得

$$M(x) = \sum_{h=1}^{\infty} M_h(x) > \frac{2}{5} \sum_{h=1}^{[c_1(\log_2 x - 3)]} \frac{1}{h!} \cdot \log_2^h x^{c_1(1-3(\log_2 x)^{-1})}.$$

(9. 3. 19)

选取 $x''_0 = \max(x'_0, 2^{3/\alpha})$，则当 $x > x''_0$ 时有

$$c_1(\log_2 x - 3) \geqslant (1-\alpha)c_1 \log_2 x, \qquad (9.\ 3.\ 20)$$

$$c_1(1 - 3(\log_2 x)^{-1}) \geqslant c_1(1-\alpha). \qquad (9.\ 3.\ 21)$$

由(9. 3. 19)式得

$$M(x) > \frac{2}{5} \sum_{h=1}^{[(1-\alpha)c_1 \log_2 x]} \frac{1}{h!} \log_2^h x^{c_1(1-\alpha)}.$$

再由(9. 3. 18)式，得

$$M(x) > \frac{1}{10} e^{\log_2 x^{(1-\alpha)c_1}} = \frac{1}{10} e^{(1-\alpha)c_1 \log_2 x}$$

$$= \frac{1}{10} x^{(1-\alpha)c_1(\log 2)^{-1}} \quad (x > x''_0). \qquad (9.\ 3.\ 22)$$

在上式中取 $\alpha = 0.001$ 可得 $M(x) > x^{3/10}$，此即是要证明的结果. 定理得证.

10 两种随机模型

10.1 两种随机模型的提出及主要结果

首先约定，本节和下节介绍用两种随机模型研究 3N + 1 猜想时所采取的对自然数 n 的迭代是通常迭代，即取定 3N + 1 函数（或称 Collatz 函数）$C(n)$ 为

$$C(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2}, 若\ n\equiv 0(\mathrm{mod}2),\\ \dfrac{3n+1}{2}, 若\ n\equiv 1(\mathrm{mod}2).\end{cases} \tag{10.1.1}$$

3N + 1 猜想之所以难以攻克，原因就在于对一般的 $n\in\mathbf{N}$，n 的迭代轨迹序列 $\mathrm{T(n)}=\{\mathrm{C^0(n)},\mathrm{C^1(n)},\mathrm{C^2(n)},\cdots\}$ 中的元素排列杂乱无章，无规律可循，从而使得 n 的完全停止次数 $t_t(n)$ 随 n 的变化情况无法把握. 然而，正是由于这些捉摸不定的性态，却为建立随机模型研究 $3N+1$ 猜想准备了条件. 本节和下节描述的两种随机模型算是比较合理地模拟了这些捉摸不定的性态的某些特征. 第一种是随机移动模型，它模拟 $C(mod2^j)$ 的性态；第二种是分支族随机移动模型，它模拟的则是 $C^{-1}(mod3^j)$ 的性态. 由这些模型，类似于猜想，证明了 $\limsup\limits_{n\to\infty}(t_t(n)/\log n)=\gamma$（常数）. 两种模型都有常数 $\gamma_0\approx 41.677647$. 对 $3N+1$ 猜想，考察直到 $n=10^{11}$ 的自然数 n 发现，由这些随机模型得到的预测值与经验数据相当吻合. 还研究了当 $k\to\infty$ 对有多少个 n 满足 $t_t(n)=k$；并估计了当 $n\to\infty$ 对 $t(n)=max\{C^k(n)|k\geqslant 0\}$ 增长的快慢程度.

定义 10.1 定义

$$t(n) = \max_{k \geq 0}(C^k(n)).$$

当 $C^k(n)$ 有界时称 $t(n)$ 为 n 的最大振幅；当 $C^k(n)$ 无界时，定义 $t(n) = \infty$.

三个基本问题激发和诱导研究者建立两种随机模型研究 3N + 1 猜想，这三个问题通俗叙述就是：

1. 当 $n \to \infty$ 时，$t_t(n)$ 的增长有多快？

2. 当 $n \to \infty$，有多少个数 n 满足 $t_t(n) = k$？

3. 当 $n \to \infty$ 时，$t(n)$ 的增长有多快？

这三个问题可用数学的语言描述得更确切. 研究表明，从某种"平均"意义上来看，$t_t(n)$ 和 $O(\log n)$ 应是等级的(见 10.2 段)，因此第 1 个问题可改述为：

1′. 确定 3N + 1 **停上常数** γ，这里

$$\gamma = \limsup_{n \to \infty}\left(\frac{t_t(n)}{\log n} : t_t(n) < \infty\right). \tag{10.1.2}$$

这个问题似乎至少和 3N + 1 猜想一样难以解决. 从逻辑上看，若 3N + 1 猜想成立，γ 也可能为 ∞.

定义 $N_k = \# \{n \mid t_t(n) = k\}$，则第 2 个问题可以重新描述为

2′. 确定 3N + 1 **增长常数** δ，这里

$$\delta = \limsup_{k \to \infty} \frac{\log N_k}{k}. \tag{10.1.3}$$

第 3 个问题可以重新描述为：

3′. 确定 3N + 1 **最大振幅常数** ρ，这里

$$\rho = \limsup_{n \to \infty} \frac{\log t(n)}{\log n}.$$

ρ 为有限数的必要条件是无发散轨迹，即 $t(n) = \infty$ 不会发生.

根据以上定义，我们容易求出 γ 和 ρ 的下界以及 δ 的上、下界.

由 $C(n) \geq \frac{n}{2}$，可以得到 $t_t(n) \geq \log n / \log 2$；再利用等式 $C^k(2^k - 1) = 3^k - 1$，便可得到 γ 的下界：

$$\gamma \geqslant \frac{\log 2 + \log 3}{(\log^2)^2} \approx 3.72931. \qquad (10.1.4)$$

上式对证明有关 γ 的结论似乎是一个非常强的条件，但它比起假设的“平均”意义下的 $(t_t(n)\log n)$ 的大小(其值为 $(\frac{1}{2}\log\frac{4}{3})^{-1} \approx 6.95212$) 却是相当弱的条件(见 10.2 段).

关于 ρ 的下界，由等式 $C^k(2^k - 1) = 3^k - 1$ 可立即得到：

$$\rho \geqslant \log 3/\log 2 \approx 1.58496. \qquad (10.1.5)$$

关于 δ 的上界，眼下依 N_1 的定义只能得到 $\delta \leqslant \log 2 \approx 0.69315$. 在 10.3 段将得到以下结果：

$$0.17328 \approx \frac{1}{4}\log 2 \leqslant \delta \leqslant \frac{1}{2}\log 3 \approx 0.54931. \quad (10.1.6)$$

上式 δ 的上下界都能加以改进使得互相靠近，但目前还不能确定 δ 的准确值是多少.

某些学者已提出用随机模型来模拟 3N + 1 函数逐次迭代的伪随机性态。这些模型包括随机移动模型，用它来估计 $t_t(n)$ 的平均性态，Crandall[13]，Rawsthorne[30] 和 Wagon[36] 曾对此模型进行过研究；还包括 Markov 链模型，用它来估算轨迹 $T(n) = \{C^k(n) | k \geqslant o\}$ 包含在不同的剩余类(mod$M$) 中的次数，Matthews 和 Watts[27,28] 及 Leigh[26] 曾对此进行过研究. 本节和下节则主要介绍由 Lagarias 和 Weiss[15] 提出和研究的两种随机过程模型，用它来模拟 3N + 1 函数的迭代性态. 虽然这些模型对 3N + 1 函数的迭代性态的证明没有什么帮助，但可利用它们作出种种预测以备对照 3N + 1 函数的经验数据进行检查，这将在 11.2 段讲到.

第一个模型在 10.2 段中介绍，是独立的随机移动的集合，它模拟的是迭代过程的正向变化(mod2^j). 该模型产生的常数 γ_{RW} 和 ρ_{RW} 分别在定理 10.1 和定理 10.2 中定义. 其中基础的随机移动同 Crandall[13] 和 Wagon[36] 的模型是类似的.

第二个模型在 10.3 段中介绍，是多分支的随机移动模型族，

它用在 N 上的多值函数 C^{-1} 以模拟迭代过程的逆向变化 $(\mathrm{mod}3^j)$. 该模型产生的常数 γ_{BP} 和 δ_{BP} 也在 10.3 段定义(这里 BP 代表 Branching Process).

常数 γ_{RW} 可从随机移动的大偏差理论的基本论据确定,而 γ_{BP} 则是利用 Biggins[18] 关于多分支的随机移动结果计算出来的. 在 11.1 段我们将证明:

$$\gamma_{RW} = \gamma_{BP} \approx 41.677647\cdots . \qquad (10.1.7)$$

这两个常数相等,先是从数值上得到,的让人感到吃惊,然后才加以证明. 它们都取决于分布的"尾部",这对模型的假设是非常重要的.(例如,一个有相同大小步长、用调整好位移的移动币给出相同偏差的简单随机移动,如在 10.2 段中所讲的模型,会产生一个与 γ_{RW} 不同的常数.)

上述两个模型建立在 3N + 1 函数的不同方面,一个模拟函数 $C(\mathrm{mod}2^j)$ 的性态,一个模拟函数 $C^{-1}(\mathrm{mod}3^j)$ 的性态. 等式 $\gamma_{RW} = \gamma_{BP}$ 是一概率论定理,它表达了在某些反复的随机移动和分支随机移动之间的某种"对偶性". 此等式将在 11.1 段证明.

对这两个随机模型的预测,使我们建立了关于 3N + 1 函数的类似的猜想. 从(10.1.7) 式我们可以提出以下猜想:

猜想 10.1 $\quad \gamma = \gamma_{RW} = \gamma_{BP}$

这个猜想看上去和 3N + 1 猜想一样难解决. 在 11.2 段和 11.3 段我们将看到现有的经验数据和此猜想基本一致.

常数 $\delta_{BP} = \log\frac{4}{3} \approx 0.28768$ 是利用多类型 Galton — Watson 过程的基本原理计算出来的(见推论 10.1). 此结论再加上其它的一些论据使人们提出以下猜想:

猜想 10.2 $\quad \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\log N_k}{k} = \log\dfrac{4}{3}$.

这个猜想几乎肯定正确. 它是与得到数 $\#\{n \leqslant x \mid t_i(n) < \infty\}$ 的形如 x^c 的下界有关的问题.

利用关于随机移动的大偏差理论，有 $\rho_{RW}=2$(定理 10.3).

猜想 10.3 3N + 1 最大振幅常数 $\rho=2$.

这个猜想和表 11.1 给出的关于 3N + 1 函数的经验数据吻合得很好，但猜想至今未获证明.

在 11.3 段描述出了用 C^{-1} 逆向搜寻求 $\gamma_{\infty}(n)=t_t(n)/\log n$ 的大值的贪心算法，以及这些贪心算法的概率模型，它用到了 10.3 段的分支随机移动. 适当的贪心分支随机移动的预测结果与 C^{-1} 的经验数据吻合得极好. Vyssotsky 在 1987 年提出了用贪心算法求 $t_t(n)$ 的大值[35]，他做了许多数值实验. 他的经验数据在 11.3 段得到了较详细的解释.

10.2 随机移动模型

观察 n 的迭代序列 $T(n)=\{C^0(n),C^1(n),C^2(n),\cdots\}$，我们会看到一个现象：序列中元素的奇偶性和一双面硬币的翻转很类似. 对给定的 $n\in\mathrm{N}$，定义 n 的第 k 个奇偶位 $b_k(n)\in\{0,1\}$ 为

$$b_k(n)\equiv C^k(n)\pmod 2,$$

定义 n 的长为 k 的子奇偶矢量 $v_k(n)$ 为

$$v_k(n)=\{b_0(n),b_1(n),\cdots,b_{k-1}(n)\}.$$

有以下的基本结果：

命题 10.1[8,9] $v_k(n)$ 是周期为 2^k 的周期函数. $\{0,1\}^k$ 中的每个矢量 v_k 恰好是 $1\leqslant n\leqslant 2^k$ 中的某一个 n 的子奇偶矢量 $v_k(n)$.

依据 n 是偶数或是奇数，$C(n)$ 的值要么是 $\frac{n}{2}$，要么近似等于 $\frac{3n}{2}$，经过 k 次迭代之后得到 $C^k(n)$ 的近似值：

$$C^k(n)\approx 3^{b_0(n)+b_1(n)+\cdots+b_{k-1}(n)}\cdot 2^{-k}\cdot n \qquad (10.2.1)$$

因此，$\{\log C^k(n)\mid k\geqslant 1\}$ 可用实轴上的移动来近似. 此移动开始于 $\log n$，若 $C^{(j-1)}(n)$ 为偶数，就取第 j 步步长为 $\log\frac{1}{2}$，否则取第 j 步

步长为 $\log\frac{3}{2}$.(10.2.1) 式的精确度随 k 的增加而减少，但对前 $\log n$ 步精确度还是比较高的. 命题10.1表明，若 n 是从区间 $[1,2^k]$ 中均匀取出来的，则子奇偶矢量 $v_k(n)$ 在 $\{0,1\}^k$ 上也是均匀分布的. 因此，除去起始点，对于前 k 步，这个移动呈现出一个简单的随机移动态势(步长不等).

以上的观察启发我们对 n 的各个值用独立随机移动模型来模拟 n 的 3N + 1 迭代过程. 对每个 n，我们用随机移动 $Z^*(n,k)$ 模拟 $\log C^k(n)$，其中 $Z^*(n,k)$ 为：

$$Z^*(n,k+1)=\begin{cases}Z^*(n,k)-\log 2, \text{以}\frac{1}{2}\text{概率},\\ Z^*(n,k)+\log\frac{3}{2}, \text{以}\frac{1}{2}\text{概率},\end{cases}$$

$$Z^*(n,o)=\log n.$$

对此模型，我们定义 $\omega_\infty(n)$ 为集合 $\{Z\leqslant 0\}$ 的**水平交叉次数**. 作为 k 的函数，过程 $Z^k(n,k)$ 有偏移 $-\frac{1}{2}\log\frac{4}{3}$，因此 $\omega_\infty(n)<\infty(a.s.)$(即 3N + 1 猜想对此模型是正确的). 又

$$E(\omega_\infty(n))=\left(\frac{1}{2}\log\frac{4}{3}\right)^{-1}\cdot\log n\approx 6.95212\log n. \tag{10.2.2}$$

现在我们把刚刚描述的模型形式化. 实际上，为了方便分析，我们改用一个等价的随机移动过程：

$$Z(n,k)=\log n-Z^*(n,k),$$

它对所有的 n 都是从 0 开始，且有正偏移.

独立随机移动过程. 给定一个 $i.i.d.$ 集合 $\{X(n,k)\mid n\geqslant 1,k\geqslant 0\}$，满足

$$P[X(\cdot,\cdot)=\log 2]=\frac{1}{2},$$

$$P[X(\cdot,\cdot)=\log\frac{2}{3}]=\frac{1}{2},$$

定义 $Z(n,o)=o$ 且

$$Z(n,k)=\sum_{i=1}^{k}X(n,i).$$

从这个模型，我们引出类似于 $t_t(n)$ 和 $t(n)$ 的两个随机变量的集合. 对 $n\geqslant 1$，定义

$$\begin{aligned}t_t(\omega_n)&=\min_{k\geqslant 1}\{k\,|\,Z^*(n,k)\leqslant o\}\\&=\min_{k\geqslant 1}\{k\,|\,Z(n,k)\geqslant \log n\},\\t(\omega_n)&=\sup_{k\geqslant o}\{\exp(Z^*(n,k))\}\\&=\sup_{k\geqslant o}\{n\cdot\exp(-Z(n,k))\}.\end{aligned}$$

如果它们不存在，则令它们为 $+\infty$. 但几乎可以肯定地说，它们每个都是有穷的.

用大偏差理论我们可以分析出 $t_t(\omega_n)/\log n$ 的大值的分布.

定理 10.1 独立随机移动过程有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{t_t(\omega_n)}{\log n}=\gamma_{RW}(a.s.),\tag{10.2.3}$$

这里 $\gamma=\gamma_{RW}$ 是以下方程

$$\gamma\cdot g\left(\frac{1}{\gamma}\right)=1\tag{10.2.4}$$

满足 $\gamma>\left(\frac{1}{2}\log\frac{4}{3}\right)^{-1}$ 的唯一解，其中

$$g(a)=\sup_{\theta\in R}\left[a\theta-\log\left(\frac{1}{2}\cdot\left(2^\theta+\left(\frac{2}{3}\right)^\theta\right)\right)\right].\tag{10.2.5}$$

证 为证明(10.2.3)式，只要证明 $\forall\,\epsilon>o$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Prob}[t_t(\omega_n)>(\gamma+\epsilon)\log n]<\infty,\tag{10.2.6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Prob}[t_t(\omega_n)>(\gamma-\epsilon)\log n]=\infty.\tag{10.2.7}$$

为得到以上两式，我们首先应注意下式：

$$\mathrm{Prob}[t_t(\omega_n)>\beta\log n]=\mathrm{Prob}[Z(n,k)<\log n;o\leqslant k\leqslant\beta\log n].\tag{10.2.8}$$

我们要利用 Chernoff 界，此界是 Chernoff 在文[20]的定理 1 给出的，此定理的内容如下：

Chernoff 定理　设 $S_m = \sum_{i=1}^{m} X_i$ 是具有分布 X 的 m 个 $i.i.d.$ 随机变量的和. 令

$$g(a) = \sup_{\theta \in R}\{\theta a - \log(E[\exp(\theta X)])\}.$$

若 $a \geqslant E(X)$，则

$$\text{Prob}[S_m \geqslant ma] \leqslant \exp(-g(a)m). \qquad (10.2.9)$$

又，若 $a \geqslant E(X)$ 且 $\varepsilon > o$，则

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\exp(-(g(a)+\varepsilon)m)}{\text{Prob}[S_m \geqslant ma]} = 0\,. \qquad (10.2.10)$$

由(10.2.10)式并利用抽签定理可得到以下引理 10.1：

引理 10.1　若 $a \geqslant E(X)$ 且 $\varepsilon > 0$，则

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\exp(-(g(a)+\varepsilon)m)}{\text{Prob}[S_j \geqslant ja; 1 \leqslant j \leqslant m]} = 0. \qquad (10.2.11)$$

证　对 m 个 $i.i.d.$ 随机变量的任一序列和任一实数 a，有

$$\text{Prob}[S_j \geqslant ja; 1 \leqslant j \leqslant m] \geqslant \frac{1}{m} Prob[S_m \geqslant ma].$$

观察可得：对于 $1 \leqslant j \leqslant m$，满足 $\sum_{i=1}^{m} X_i = m\beta$ 的任意 m 个实数 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 的集合至少存在一个 m 环排列 $(X_i, X_{i+1}, \cdots, X_m, X_1, \cdots, X_{i-1})$，其第 j 部分和至少为 $j\beta$. 实际上，排列是从使 $\{S_i - i\beta | 1 \leqslant i \leqslant m\}$ 中元素取得最小值的 i 开始的[33]. 现只要在(10.2.10)式中用 $\frac{1}{2}\varepsilon$ 代替 ε 便可由上面的不等式得到(10.2.11)式.

在继续证明之前，我们注意到 Chernoff 界存在更强的形式，其中之一是：

$$\text{Prob}[S_m \geqslant ma] = \exp(-g(a)m - \frac{1}{2}\log m + O(1))\,.$$

见文[29]. 用此界，我们可以证明当 $\varepsilon = 0$ 时，(10.2.7)式也成立.

随机移动 $Z(n,k)$ 有步长 log2，或 $\log\frac{2}{3}$. 一个步长则有正偏移 $E[x]=\frac{1}{2}\log\frac{4}{3}$，和即时生成函数（Laplace 变换）：

$$M(\theta)=E[\exp(\theta x)]=\frac{1}{2}(2^{\theta}+(\frac{2}{3})^{\theta}). \quad (10.2.12)$$

我们定义 γ_{RW} 满足

$$\gamma_{RW}>E[X]^{-1},$$

且

$$\gamma g(\frac{1}{\gamma})=1. \quad (10.2.13)$$

(10.2.13)式的解的唯一存在性可用标准式加以证明.

引理 10.2 函数

$$g(a)=\sup_{\theta\in R}(\theta a-\log\left(\frac{1}{2}\left(2^{\theta}+\left(\frac{2}{3}\right)^{\theta}\right)\right) \quad (10.2.14)$$

在区间 $(\log\frac{2}{3},\log 2)$ 内有界、非负、严格凸，且 $g(\frac{1}{2}\log\frac{4}{3})=0$.

证 因为在 **R** 上有 $d^2M/d\theta^2>0$，故(10.2.12)式中的函数 $log M(\theta)$ 在 **R** 上是严格凸的. 又因为 g(a) 是 $log M(\theta)$ 在 R 上的共轭凸函数（*Legendre* 变换），故在它取得有界值的地方是严格凸的，例子可见文[31]. 若令 $\theta=0$，则此处有 $g(a)\geqslant 0$. 对 $(-log M(\theta))$ 关于 θ 求导数可得

$$\frac{d}{d\theta}(-log M(\theta))=-log 2+\left(\frac{3^{-\theta}}{1+3^{-\theta}}\right)log 3 \quad (10.2.15)$$

上式右端是关于 θ 的单调减函数 $(-\infty<\theta<\infty)$，且当 $\theta\to-\infty$ 时函数值 $\to-\log\frac{2}{3}$；当 $\theta\to\infty$ 时，函数值 $\to-\log 2$. 因此，方程

$$(d/d\theta)(a\theta-log M(\theta))=0$$

有唯一解 $\theta=\theta(a)$ $\left(log\frac{2}{3}<a<log 2\right)$，它使得(10.2.14)式的

右端取得最大值，并由此可得 $g\left(\frac{1}{2}log\ \frac{4}{3}\right)=0$. 引理 10.2 得证.

引理 10.2 表明 $g(0)>0$ 且 $g(a)$ 在区间$[0,\frac{1}{2}\log\frac{4}{3}]$上严格单调减，因此 $\gamma g(\frac{1}{\gamma})$ 在$[(\frac{1}{2}\log\frac{4}{3})^{-1},\infty)$ 上严格单增且 $0\leqslant\gamma g(\frac{1}{\gamma})<\infty$，又值域为$[0,\infty)$，故(10.2.13) 有唯一解 $\gamma>(\frac{1}{2}\log\frac{4}{3})^{-1}$.

为继续证明定理 10.1，我们在假设 $\gamma=\gamma_{RW}$ 的情况下利用 Chernoff 定理中的(10.2.9) 式. 由于 $\gamma g(\frac{1}{\gamma})$ 是严格单增的，则存在依赖于 ε 的 $\varepsilon'>0$，使得

$$
\begin{aligned}
&\text{Prob}[t_l(\omega_n)>(\gamma+\varepsilon)\log n]\\
&\quad\leqslant\text{Prob}[Z(n,(r+\varepsilon)\log n)<\log n]\\
&\quad\leqslant\exp(-g((\gamma+\varepsilon)^{-1})(\gamma+\varepsilon)\log n)\\
&\quad\leqslant\exp(-(1+\varepsilon')\log n)=n^{-1}\varepsilon'.
\end{aligned}
\qquad(10.2.16)
$$

这就证明了(10.2.6)式.

因为随机移动 ω_n 对不同的 n 是独立的，用 Borel — Cantelli 定理且令 $\varepsilon\to0$，可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{t_l(\omega_n)}{\log n}\leqslant\gamma_{RW}(a.s.).$$

为在 $\gamma=\gamma_{RW}$ 时得到(10.2.7) 式，对 $0<\varepsilon_1<g(\gamma-\varepsilon)$ 和所有的 $n>n_0(\varepsilon,\varepsilon_1)$，利用引理 10.1 得到

$$
\begin{aligned}
&\text{Prob}[t_l(\omega_n)>(\gamma+\varepsilon)\log n]\\
&\geqslant\text{Prob}[Z(n,k)<\frac{k}{\gamma-\varepsilon}:0\leqslant k\leqslant(\gamma-\varepsilon)\log n]\\
&\geqslant\exp(-(g((\gamma-\varepsilon)^{-1})+\varepsilon_1)(\gamma-\varepsilon)\log n).
\end{aligned}
\qquad(10.2.17)
$$

可选取足够小的 $\varepsilon_1>0$，使得对某个 ε' 和所有足够大的 n，有 $\text{Prob}[t_l(\omega_n)>(\gamma-\varepsilon)\log n]\geqslant\exp(-(1-\varepsilon')\log n)=n^{-1+\varepsilon'}$.

于是(10.2.7)式得证.

再用 Borel—Cantelli 引理并令 $\epsilon \to 0$,则有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_t(\omega_n)}{\log n} \geqslant \gamma_{RW}(a.s.).$$

到此定理 10.1 全部证完.

关于 γ_{RW} 的值,可以求得 $\gamma_{RW} \approx 41.677647$.

下面我们给出一个大偏差产生的密度结果.

定理 10.2 对满足条件

$$\left(\frac{1}{2}\log\frac{4}{3}\right)^{-1} < \alpha < \gamma_{RW}$$

的独立随机移动过程,有

$$E\left[\#\left\{n \leqslant x: \frac{t_t(\omega_n)}{\log n} \geqslant \alpha\right\}\right] \leqslant \left(1 - \alpha g\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)^{-1} \cdot x^{1-\alpha g\left(\frac{1}{\alpha}\right)}. \tag{10.2.18}$$

又,对任何 $\epsilon > 0$,下式

$$E\left[\#\left\{n \leqslant x: \frac{t_t(\omega_n)}{\log n} \geqslant \alpha\right\}\right] \geqslant x^{1-\alpha g\left(\frac{1}{\alpha}\right)-\epsilon}. \tag{10.2.19}$$

对所有足够大的 $x \geqslant x_0(\epsilon)$ 成立.

证 由 Chernoff 定理,类似于(10.2.16)式我们可以推得对任何面定的 n,有

$$\mathrm{Prob}[t_t(\omega_n) > \alpha\log n] \leqslant \exp\left(-\alpha g\left(\frac{1}{\alpha}\right)\log n\right).$$

由此可得

$$E\left[\#\left\{n \leqslant x: \frac{t_t(\omega_n)}{\log n} \geqslant \alpha\right\}\right] = \sum_{n=1}^{x}\mathrm{Prob}[t_t(\omega_n) > \alpha\log n]$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{x} n^{-\alpha g\left(\frac{1}{\alpha}\right)},$$

由此可得(10.2.18)式.

类似于(10.2.17)式我们可以推得对任何 $\epsilon' > 0$,有

$$\mathrm{Prob}[t_t(\omega_n) > \log n] \geqslant \mathrm{Prob}\left[Z(n,k) < \frac{k}{\beta}; 0 \leqslant k \leqslant \alpha\log n\right]$$

$$\geqslant \exp\left(-\left(g\left(\frac{1}{\alpha}\right)+\varepsilon'\right)\alpha\log n\right)$$

对所有足够大的 $x \geqslant x(\varepsilon')$ 成立. 再选取足够小的 ε'，并对所有的 $n \leqslant x$ 求和便得到(10.2.19) 式，于是定理 10.2 证毕.

表 10.1　大偏差密度 $\alpha g\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ 及密度比 $\gamma(\alpha)$（当 $\omega_n \geqslant \alpha\log n$ 时）

密度 α	$\alpha g\left(\frac{1}{\alpha}\right)$	密度比 $\gamma(\alpha)$
6.952119	0.000000	0.500000
10	0.031883	0.539906
15	0.148531	0.570247
20	0.293284	0.585418
25	0.449402	0.594520
30	0.611249	0.600588
35	0.776375	0.604923
40	0.943568	0.608173
41.677647	1.000000	0.609090

表 10.1 给出了这些密度的一些特殊值以及密度比 $\gamma(\alpha)$:

$$\gamma(\alpha)=\frac{1/\alpha+\log 2}{\log 3},$$

这里 $\gamma(\alpha)$ 表示满足 $t_t(\omega_n)=\alpha\log n$ 的一个随机移动中，步长为 $\log\frac{2}{3}$ 的步数和总步数之比.（此比率对应出现在满足条件 $t_t(n)=\alpha\log n$ 的轨迹中的迭代 $C^k(n)\equiv 1(\mathrm{mod}2)$ 所发生的比率.）

大偏差理论也预言“大多数”具有接近于常数 γ_{RW} 的 $\gamma(\omega_n)$ 的随机移动轨迹. 若将它们的对数图作出来，则对于它们的全长大

致上都是斜率为$(\gamma_{RW})^{-1} \approx 0.02399$的直线(见图11.2).实际上,此结论可用公式精确地表示出来[37,17].

现在我们分析$\log t(\omega_n)/\log n$的大值的特点.有以下定理:

定理10.3 对独立随机移动过程,有

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log t(\omega_n)}{\log n} = \rho_{RW}(\text{a.s.}), \qquad (10.2.20)$$

这里$\rho_{RW} = 2$.

证 此证明类似于定理10.1.现在只说明常数ρ_{RW}是如何确定出来的.我们要利用用于初始随机移动的Chernoff定理,它有即时生成函数

$$\overline{M}(\theta) = \log \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\theta} + \left(\frac{3}{2}\right)^{\theta}\right) = M(-\theta). \qquad (10.2.21)$$

设$\rho_{RW} = 1 + \eta$,其中$\eta > 0$待定.对于这个$\eta > 0$,当$n \to \infty$时有

$$\text{Prob}[S_m \geqslant \eta\log;\text{某 } m \geqslant 0] = \exp(-(1+o(1))\log n). \qquad (10.2.22)$$

一负偏移随机移动轨迹,达到给定的正高度H的概率最大,该轨迹大致上是一些斜率为常数a的直线.又由Chernoff定理,当$m \to \infty$时,有

$$\text{Prob}[S_m > am] = \exp(-\overline{g}(a))(1+o(1))m).$$

其中

$$\overline{g}(a) = \sup_{\theta\in R}(\theta a - \log\overline{M}(\theta)). \qquad (10.2.23)$$

[$g(a)$是引理10.2中的函数,而$\overline{g}(a) = g(-a)$.]此轨迹在迭代H/a步后达到高度H,且为了使$\exp(-(\overline{g}(a)/a)H)$最大,必须使$\overline{g}(a)/a$最小.若$\theta = \overline{\theta}(a)$使(10.2.23)式右边达到上确界,则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{da}}\overline{g}(a) &= \overline{\theta}(a) + \frac{\partial}{\partial\theta}(\theta\partial - \log\overline{M}(\theta))|_{\theta=\overline{\theta}} \\ &= \overline{\theta}(a).\end{aligned} \qquad (10.2.24)$$

为使 $\bar{g}(a)/a$ 最小，我们发现不动点满足

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{da}}\left(\frac{\bar{g}(a)}{a}\right)=\frac{1}{a^2}\left(\bar{g}(a)-a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{da}}\bar{g}(a)\right).$$

由(10.2.23)式(10.2.24)式可知任何不动值 a^* 满足

$$0=\bar{g}(a^*)-a^*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{da}}\bar{g}(a)=\log M(\bar{\theta}(a^*)). \quad (10.2.25)$$

$M(\theta)$ 的严格凸保证 $\bar{\theta}(a^*)$ 是唯一的，又，观察(10.2.21) 式，有 $\bar{\theta}(a^*)=1$. 而且(10.2.25) 式给出：

$$\frac{\bar{g}(a^*)}{a^*}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{da}}\bar{g}(a)=\bar{\theta}(a^*)=1,$$

容易检验它是 $\bar{g}(a)/a$ 的最小值. 取 $H=\log n$，得到 $\eta=1$，从而 $\rho_{RW}=2$. 另外，我们也能确定最优斜率的值为

$$a^*=\frac{3}{4}\log 3-\log 2\approx 0.1308.$$

定理 10.3 证毕.

可以证明，满足 $t(\omega_n)>n^{2-\epsilon}$ 的几乎所有轨迹在它们的前 $\beta_1^{-1}\log n\approx 7.6445\log n$ 步迭代中大致成直线，斜率为 $\beta_1=\frac{3}{4}\log 3-\log 2\approx 0.1308$，在接着的 $\beta_1^{-1}(2\log n)$ 步迭代中也大致成直线，斜率为 $\beta_2=\left(\frac{1}{2}\log\frac{3}{4}\right)^{-1}\approx -0.1453$. 因此有 $\gamma(\omega_n)=\beta_1^{-1}+\beta_2^{-1}\approx 21.5487$(见 11 节图 11.2).

对 $0\leqslant\alpha<1$，我们也可以估计满足 $t(\omega_n)>n^{2-\alpha}$ 的轨迹 ω_n 的条数.

定理 10.4 对独立随机移动过程，当 $x\to\infty$ 时以下等式

$$E\left[\#\left\{n\leqslant x:\frac{\log t(\omega_n)}{\log n}\geqslant 2-\alpha\right\}\right]=x^{\alpha(1+o(1))}$$

几乎肯定成立.

证 此定理的证明类似于定理 10.2，从略.

10.3 分支过程模型

$3N+1$ 函数从 1 开始的逆向演变可用一棵有根(无限)树 $\mathscr{T}$ 表示,$\mathscr{T}$ 的树根结点标号为 1. 从根开始的第 k 层结点用使得 $t_t(n)=k$ 的 n 标记,且有连接 n 和 $C(n)$ 的边. 根结点构成第 0 层. 如图 10.1 所示. 与树 $\mathscr{T}$ 相关的量有 $N(k)$,它表示第 k 层的顶点数;还有 $H(k)$,它是第 k 层结点的最小标号,即:

$$N(k)=\#\{n \mid t_t(n)=k\},$$

$$H(k)=\min\{n \mid t_t(n)=k\}.$$

易知 $3N+1$ 增长常数为

$$\gamma=\limsup_{k\to\infty}\left(\frac{k}{\log H(k)}\right). \tag{10.3.1}$$

树 $\mathscr{T}$ 可以从它在第 2 层的唯一结点(标记为 4)开始,用 N 上的多值映身 C^{-1} 递归地构造出来,其中 C^{-1} 定义为:

$$C^{-1}(n)=\begin{cases}\{2n\}, 若\ n\equiv 0,1(\bmod 3),\\ \left\{2n,\dfrac{2n-1}{3}\right\}, 若\ n\equiv 2(\bmod 3).\end{cases}$$

树中第 $k+1$ 层元素是用 C^{-1} 作用于第 k 层元素产生的.

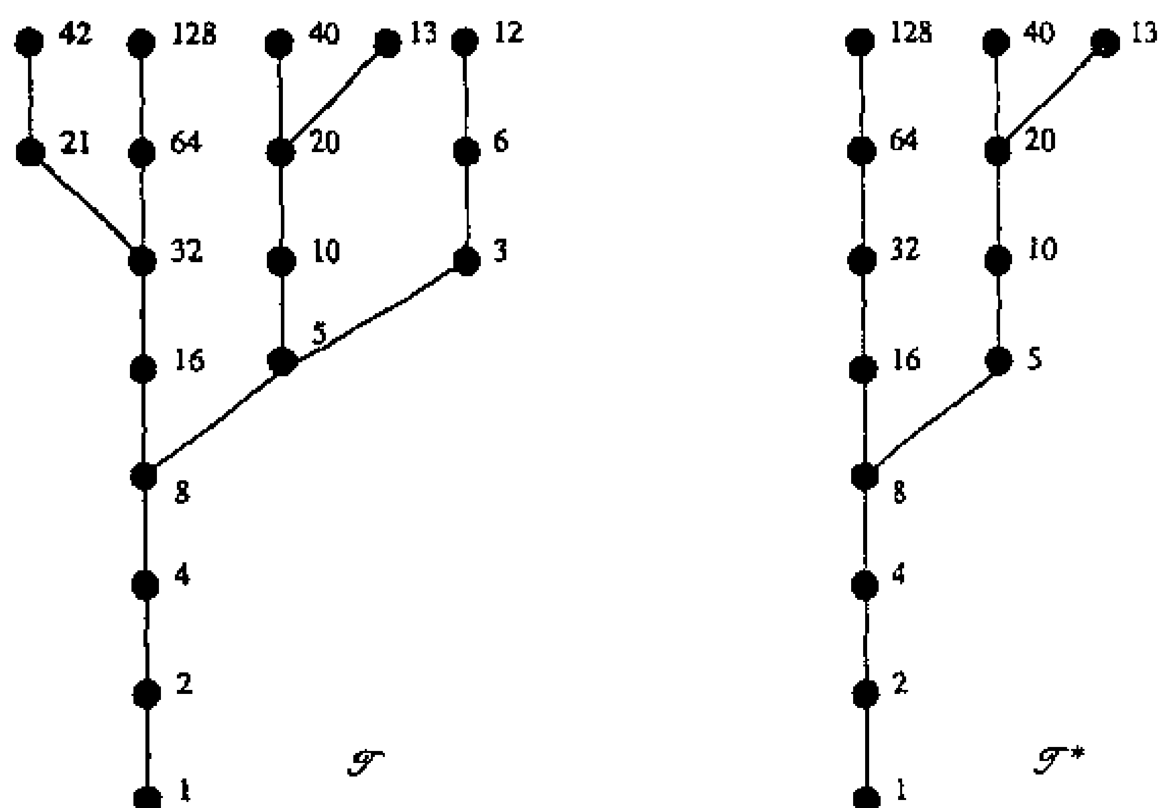


图 10.1　$3N+1$ 树 $\mathscr{T}$ 和修剪树 $\mathscr{T}^*$

更一般地，我们可以从任何 $m \geqslant 1$ 开始，用 C^{-1} 得到一棵无限的有根树 $\mathscr{T}(m)$，只要将 C^{-1} 作用于第 k 层标记结点便可得到第 $k+1$ 层的标记结点. 如果根结点 m 在一个圈中，则 C^{-1} 不能"解开"此圈，就会使得相同的标号反复出现在树的不同层次上. 如果 m 不在一个圈中，则树中所有结点的标号是不相同的. [我们把树 $\mathscr{T}$ 看作是 $\mathscr{T}(4)$ 而不是 $\mathscr{T}(1)$. 注意 $\mathscr{T}(4)$ 是由 $\mathscr{T}(1)$ 去掉前两层而得到的.] 树 $\mathscr{T}(m)$ 在第 k 层中的标记结点是 m 的子孙系统的第 k 代子孙，它们的标号集合是 $\{n \mid C^k(n) = m\}$. 记 $\mathscr{T}_k(m)$ 为由 $\mathscr{T}(m)$ 的前 k 层组成的有限标记树；$\overline{\mathscr{T}}_k(m)$ 是将 $\mathscr{T}_k(m)$ 的结点标记 n 用它的奇偶位 $b(n) \equiv n(\bmod 2)$ 代替而得到的树.

树 $\mathscr{T}(m)$ 在结点 n 处的分支类型根据 C^{-1} 的定义由 $n(\bmod 3)$ 决定. 类似地，该树深度为 k 的分支类型完全是由 $m(\bmod 3^k)$ 所决

定的；若 $m_1 = m_2 (\bmod 3^k)$，则 $\overline{\mathscr{T}}_k(m_1)$ 与 $\overline{\mathscr{T}}_k(m_2)$ 完全相同.

树 $\mathscr{T}(m)$ 的分支性态随 $m \equiv 0(\bmod 3)$ 还是 $m \not\equiv 0(\bmod 3)$ 的不同而有很大不同. 若 $m \equiv 0(\bmod 3)$，则树 $\mathscr{T}(m)$ 从不分支，且有结点 $\{2^j m \mid j \geqslant 0\}$. 下面我们将证明若 $m \not\equiv 0(\bmod 3)$，则树 $\mathscr{T}(m)$ 在第 k 层的结点数 $N(k,m)$ 随 k 成指数增长.

实际上，树 $\mathscr{T}$ 中的结点 $m \equiv 0(\bmod 3)$ 对 $N(k)$、$H(k)$ 和 γ 没有什么影响，故去掉它们，我们可得到简化形式. 记 $\mathscr{T}^*$ 为去掉 $\mathscr{T}$ 中所有标记为 $n \equiv 0(\bmod 3)$ 的结点后而得到的**修剪树**. 因为 $n \equiv 0(\bmod 3)$ 的所有子孙系统就是它们自己 $0(\bmod 3)$，因此 $\mathscr{T}^*$ 是一棵树（图 10.1）. 利用 N 上的映射 $(C^*)^{-1}$，树 $\mathscr{T}^*$ 可以从它在第 2 层的唯一结点（标号为 4）递归地构造出来，这里的 $(C^*)^{-1}$ 定义如下：

$$(C^*)^{-1}(n) = \begin{cases} \{2n\}, \text{若 } n \equiv 1,4,5,7(\bmod 9), \\ \left\{2n, \dfrac{2n-1}{3}\right\}, \text{若 } n \equiv 2,8(\bmod 9). \end{cases} \tag{10.3.2}$$

对于 $\mathscr{T}^*$，类似于 $N(k)$ 和 $H(k)$ 的量是：

$$N^*(k) = \#\{n \mid t_t(n) = k \text{ 且 } n \not\equiv 0(\bmod 3)\},$$

$$H^*(k) = \min\{n \mid t_t(n) = k \text{ 且 } n \not\equiv 0(\bmod 3)\}.$$

下面的引理说明当我们考虑用 $\mathscr{T}^*$ 来代替 $\mathscr{T}$ 时并不会带来什么损失.

引理 10.3 对所有的 $k \geqslant 1$，有

$$\frac{1}{k} N(k) \leqslant N^*(k) \leqslant N(k), \tag{10.3.3}$$

$$H(k) \leqslant H^*(k) \leqslant 4H(k). \tag{10.3.4}$$

从而

$$\gamma = \limsup_{k \to \infty} \left\{ \frac{k}{\log H^*(k)} \right\}. \tag{10.3.5}$$

证 (10.3.3)式中，$N^*(k) \leqslant N(k)$ 显然成立；(10.3.4) 中，

$H^*(k) \geqslant H(k)$ 显然成立. 为证明 $\frac{1}{k}N(k)$ 可作为 $N^*(k)$ 的下界，令 $\tilde{N}(k) = \{n \mid t_t(n) = k$ 且 $n \equiv 3 \pmod 6\}$. 由于对这样的 n，有 $C(n) = (3n+1)/2 \not\equiv 0 \pmod 3$，我们有

$$\tilde{N}(k) \leqslant N^*(k-1).$$

另外，任何满足 $t_t(n) = k$ 的 $n \equiv 0 \pmod 6$ 是在较低层的某个 $m \equiv 3 \pmod 6$ 的唯一后代，故

$$N(k) = N^*(k) + \sum_{j=1}^{k} \tilde{N}(j).$$

由此，有

$$N(k) \leqslant \sum_{j=1}^{k} N^*(k) = kN^*(k),$$

即 $\frac{1}{k}N(k)$ 可作为 $N^*(k)$ 的一个下界.

为证明 $4H(k)$ 是 $H^*(k)$ 的一个上界，假设 $H(k) = n \equiv 0 \pmod 3$. 令 $n = 2^j\tilde{n}$，这里 $\tilde{n} \equiv 1 \pmod 2$. 那么 $C^{j+1}(n) = (3\tilde{n}+1)/2$ 且 $m^* = 2^j \cdot (3\tilde{n}+1)$ 也有 $t_t(m^*) = k$，于是

$$H^*(k) \leqslant m \leqslant 2^j(4\tilde{n}) = 4H(k).$$

最后(10.3.5)式可由(10.3.1)式和(10.3.4)式的上界得到. 至此引理 10.3 证毕.

同构造树 $\mathscr{T}(m)$，$\mathscr{T}_k(m)$ 和 $\overline{\mathscr{T}}_k(m)$ 类似，用 $(C^*)^{-1}$ 代替 C^{-1}，可构造出修剪树 $\mathscr{T}^*(m)$，$\mathscr{T}_k^*(m)$ 和 $\overline{\mathscr{T}}_k^*(m)$. 树 $\mathscr{T}^*(m)$ 和 $\mathscr{T}_k^*(m)$ 是树 $\mathscr{T}(m)$ 和 $\mathscr{T}_k(m)$ 去掉所有标记为 $n \equiv 0 \pmod 3$ 的结点而得到的，只有当 $m \not\equiv 0 \pmod 3$ 时它们才非空.

树 $\mathscr{T}^*(m)$ 在结点 n 处的分支类型根据 $(C^*)^{-1}$ 的定义由 $n \pmod 9$ 决定. 类似的，某深度为 k 的分支结构由 $m \pmod{3^{k+1}}$ 决定；如果 $m_1 \equiv m_2 \pmod{3^{k+1}}$，则 $\overline{\mathscr{T}}_k^*(m_1)$ 和 $\overline{\mathscr{T}}_k^*(m_2)$ 是相同的.

对任何 $m \not\equiv 0 \pmod 3$，树 $\mathscr{T}^*(m)$ 的深为 k 的结点的数目 $N^*(k,m)$ 满足

$$N^*(k,m) \geqslant 2^{[k/4]}.$$

这是因为若 $n \not\equiv 0 \pmod 3$，则 $\{n,2n,4n,8n\}$ 的元素中至少有一个同余于 2 或 $8 \pmod 9$，所以由递归式(10.3.2)可得 $\mathscr{T}^*(m)$ 中的任何路径上每 4 层至少会有一个分支. 因此，有

$$N(k) \geqslant N^*(k) = N^*(k-2,4) \geqslant 2^{[(k-2)/4]}. \quad (10.3.6)$$

因为每棵深为 2 的树 $\mathscr{T}_2^*(m')$ 最多有 3 个分支，因此用类似的方法，对 $m \not\equiv 0 \pmod 3$ 我们得到上界

$$N^*(2k,m) \leqslant 2^{k/2}.$$

再由引理 10.3，有

$$N(k) \leqslant kN^*(k) \leqslant k3^{(k+1)/2}.$$

由上式和(10.3.6)式便可推得

$$\frac{1}{4}\log 2 \leqslant \delta \leqslant \frac{1}{2}\log 3. \quad (10.3.7)$$

由下面的定理知，$N(k)$ 的实际增长率可能为 $\log\frac{4}{3}$，这表明当 m 变化时，$N^*(k,m)$ 的平均值是 $\left(\frac{4}{3}\right)^k$.

定理 10.5 对于修剪树 $\overline{\mathscr{T}}_k(m)$，有

$$\sum_{\substack{m \pmod{3^{k+1}} \\ m \not\equiv 0 \pmod 3}} N^*(k,m) = 2 \cdot 4^k. \quad (10.3.8)$$

因此，如果一个满足 $m \not\equiv 0 \pmod 3$ 的剩余类 $m \pmod{3^{k+1}}$ 被选择具有均匀分布，则树 $\overline{\mathscr{T}}_k^*(m)$ 中叶子数的期望值为 $\left(\frac{4}{3}\right)^k$.

证 对一棵第 j 层结点 n 被奇偶位 0 或 1 标记的树 $\overline{\mathscr{T}}_k^*(m)$，观察其从第 j 层到第 $j+1$ 层的一条边. 对树 $\overline{\mathscr{T}}_k^*(m)$ 的每片叶子 n，我们把它的边的奇偶序列 $v(k,n) = (b(n), b(C(n)), \cdots, b(C^{k-1}(n)))$ 赋给根 m. 在一棵固定的树 $\overline{\mathscr{T}}_k^*(m)$ 中没有两片叶子有相同的奇偶序列. 我们问：在这些树中有多少片叶子有一给定的奇偶序列 $v = (v_1, v_2, \cdots, v_k) \in \{0,1\}^k$？答案：它等于 $C^k(n)$ 可能的不同剩余类 $(\bmod 3^{k+1})$ 的数目，其中的 n 是指有奇偶序列 v 的 $n \pmod 2$. 现在

$$2^k C^k(n) = 3^{v_1+\cdots+v_k}\cdot n + \sum_{i=1}^{k-1} v_i \cdot 3^{v_1+\cdots+v_i}\cdot 2^i,$$

对此等式两边取余 $(\bmod 3^k)$ 可见 $n(\bmod 3^{k+1-(v_1+\cdots+v_k)})$ 决定 $C^k(n)(\bmod 3^{k+1})$. 因此，条件 $n\not\equiv 0(\bmod 3)$ 隐含着对如此的叶子正好有 $2\cdot 3^{k-(v_1+\cdots+v_k)}$ 种选择. 现在满足 $v_1+\cdots+v_k=j$ 的 $\nu\in\{0,1\}^k$ 的个数为 $\binom{k}{j}$，因此叶子的总数为

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}2\cdot 3^{k-j} = 2(1+3)^k = 2\cdot 4^k,$$

此即是(10.3.8)式.

因为满足 $m\equiv 0(\bmod 3)$ 的剩余类 $m(\bmod 3^{k+1})$ 的数目是 $2\cdot 3^k$，故在对 $\mathscr{T}_k^*(m)$ 的均匀抽取中树叶的数目的期望值为 $\left(\frac{4}{3}\right)^k$. 到此定理 10.5 证毕.

可类似地证明如果 $N(k,m)$ 表示树 $\mathscr{T}_k(m)$ 中的叶子数目，则

$$\sum_{m(\bmod 3^k)} N(k,m) = 4^k.$$

因此在随机抽取的一棵树 $\mathscr{T}_k(m)$ 中，其叶子数的期望值也是 $\left(\frac{4}{3}\right)^k$. 但若 $m\equiv 0(\bmod 3)$，则它只有一片叶子，而若 $m\not\equiv 0(\bmod 3)$，则其叶子数目的期望值是 $\frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^k$.

现在我们描述一个分支过程族，称为**多分支随机移动**，它模拟的是所有满足 $m\not\equiv 0(\bmod 3)$ 的树 $\mathscr{T}^*(m)$ 的性态，特别是 $\mathscr{T}^*$ 的. 一个多分支随机移动描述由被置于一根实轴 R 上的有限多种(P 种)个体组成的群体随时变化的演变，这种演变是从一个位于原点的单一个体开始的. 类 i 每个个体产生的后代在 R 上的位置(从该个体的位置开始算起)分布由一个(多类型的)点过程 $\mathscr{T}_i$ 描述，而与所有其它的个体无关. 点过程 $\mathscr{T}_i$ 产生各种类型 $\mathbf{n}=(\mathrm{n}_1,\mathrm{n}_2\cdots,\mathrm{n}_p)$ 后代的总和，它的概率分布为 $\{P_i(\boldsymbol{n})\,|\,\boldsymbol{n}\in\mathbf{N}^p\}$，其中 $m=$

$n_1+n_2+\cdots+n_p$ 个个体位置$(l_1,l_2,\cdots,l_m)$从依赖于 n 的在 R^m 上的一个分布得到. 在此模型中，一个个体的后代的位置可能相互关联[18]. [在所有位置非负的特殊情况下，位置叫出生时间. 个体从出生开始永远存在，是可以观察到的. 这样的过程叫 *Crump* — *Mode* 过程，由 *Crump* 和 *Mode* 提出[21,22,23].]

与任何分支随机移动相关的是一更简单的分支过程，它规定每一个体等于每类亲缘的个数 n，并对所有个体给定一个单位生存期. 此过程是一个多类型的 *Galton* — *Watson* 过程. 作为例子，可参见文[16].

从一个简单个体开始的多类 *Galton* — *Watson* 过程的任何实现 ω 可用一棵有根树表示，其边表示亲缘关系，结点由个体类型标记. 从根结点开始的第 k 层结点形成了根个体的第 k 代子孙. 一个多类型分支随机移动的任何实现可用一个类似的树表示，其中树的每条边还被赋予一个标记，此标记给出对应那条边的后代的位置.

多类型分支随机移动族$\{\mathscr{B}(3^j)\mid j=0,1,2\cdots\}$模拟的是多值函数$(C^*)^{-1}(\bmod 3^j)$的性态.

分支随机移动 $\mathscr{B}[1]$　只有一类个体. 以$\frac{2}{3}$的概率，一个体有一单个后代处于离其祖先 log2 处的位置，以$\frac{1}{3}$的概率，它有两个后代处于离其祖先分别为 log2 和 $\log\frac{2}{3}$ 处的位置.

分支随机移动 $\mathscr{B}[3^j](j\geqslant 1)$　有 $P=2\cdot 3^{j-1}$ 类个体，以 $m\not\equiv 0(\bmod 3)$ 的剩余类 $m(\bmod 3^j)$ 标记. 类 $m(\bmod 3^j)$ 个体的后代分布确定如下：把 $m(\bmod 3^{j+1})$ 看作以概率$\frac{1}{3}$成为三个剩余类 $\tilde{m}(\bmod 3^{j+1})$ 中满足 $m\equiv\tilde{m}(\bmod 3^j)$ 的那一类. 由$(C^*)^{-1}(\tilde{m})$给出的树 $\mathscr{T}_1(\tilde{m})$ 有一个或两个后代，其标记被确定$(\bmod 3^j)$. 一个后代 $2\tilde{m}(\bmod 3^j)$ 有偏离祖先 $log2$ 的位置，另一个后代$(2\tilde{m}$ —

$1)/3(\bmod 3^j)$ 有偏离祖先$\log\frac{2}{3}$的位置.

位置取近似的增量的对数值,该增量就是 3N + 1 函数的逆向迭代的大小.

设 ω 表示从一个位于 0 处且记为 $\omega_{0,1}$ 的单一个体开始的分支随机移动 $\mathscr{B}[3^j]$ 的实现,且设 $\mathscr{T}(\omega)$ 为其后代树,ω 的第 k 代子孙的各个个体由矢量

$$M_k(\omega)=\{N_k^{(1)}(\omega),\cdots,N_k^{(p)}(\omega)\}$$

表示,我们记(所有类型的) k 代子孙的所有个体数为:$N_k(\omega)=\sum_p N_k^{(p)}(\omega)$. 第 k 代子孙集合记为$\{\omega_{k,i}\mid 1\leqslant i\leqslant N_k(\omega)\}$,其位置次序确定如下:$L(\omega_{k,i})$ 为 $\omega_{k,i}$ 在 R 上的位置,令 $\omega_{k,i}[l]$ 表示 $\omega_{k,i}$ 在第 l 层上的祖先$(0\leqslant l\leqslant k)$,因此 $\omega_{k,i}[0]=\omega_{0,1}$. 根据 $L(\omega_{k,i})-L(\omega_{k,i}[k-1])$ 的值是 $\log 2$ 或是 $\log\frac{2}{3}$,赋予 $\omega_{k,i}$ 奇偶位为 $b(\omega_{k,j})=0$ 或是 1. 现赋给 $\omega_{k,i}$ 奇偶矢量

$$\nu(\omega_{k,i})=\{b(\omega_{k,i}[1]),\cdots,b(\omega_{k,i}[k])\}.$$

对固定的 k,没有两个 $\omega_{k,i}$ 有相同的奇偶矢量. 我们排列它们使得矢量 $\nu(\omega_{k,i})$ 是以增加的字典顺序排列. $C(\omega_{k,i})(\bmod 3^j)$ 表示个体 $\omega_{k,i}$ 的类型.

我们还定义完全类似于 3N + 1 过程的几个量. $\omega_{k,i}$ 的密度比 $r(\omega_{k,i})$ 定义为

$$r(\omega_{k,i})=\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}b(\omega_{k,l}). \tag{10.3.9}$$

而

$$S(\omega_{k,i})=\exp(L(\omega_{k,i}))$$

的大小类似于 3N + 1 树 $\mathscr{T}$ 中的结点标记. 密度比 $r(\omega_{k,i})$ 和位置 $L(\omega_{k,i})$ 的关系是

$$L(\omega_{k,i})=k(\log 2-r(\omega_{k,i})\log 3). \tag{10.3.10}$$

从类型 $4(\bmod 3^j)$ 的单一个体开始的过程 $\mathscr{B}[3^j]$ 的演变产生一类似 $\mathscr{T}^*$ 的树. 我们现在研究当 $k\to\infty$ 时,类似于 3N + 1 的

些量的变化性态. 在第 k 代成员中第一个出身是

$$L_k^*(\omega) = \min\{L(\omega_{k,i}) \mid 1 \leqslant i \leqslant N_k(\omega)\},$$

且 $\mathscr{B}[3^j]$ 中 ω 的第一个渐近出身是

$$\beta^{(j)}(\omega) = \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k}(L_k^*(\omega)).$$

过程 $\mathscr{B}[3^j]$ 的类似于 3N + 1 停止常数 γ(见(10.3.1)式)的量是

$$\gamma_{\mathscr{B}}^{(j)}(\omega) = \limsup_{k\to\infty} \frac{k}{L_k^*(\omega)} = (\beta^{(j)}(\omega))^{-1}. \quad (10.3.11)$$

$\mathscr{B}[3^j]$ 的类似于 3N + 1 增长常数 δ 的量是

$$\delta_{\mathscr{B}}^{(j)}(\omega) = \limsup_{k\to\infty} \frac{\log N_k(\omega)}{k}.$$

$\mathscr{B}[1]$、$\mathscr{B}[3]$ 和 $\mathscr{B}[9]$ 的转移矩阵在表 10.2 中给出. 矩阵的行给出了个体类型,列表示后代类型. 按照两种可能的后代出生时间(对应于奇偶位 $b = 0$ 或 1)分别给出了转移矩阵 $\mathbf{E}_j^{(b)}$. 运用分支过程的经典结果,容易证明对于过程 $\mathscr{B}[3^j]$,个体 $\mathbf{M}_k(\omega)$ 的数量以几何级数 $\left(\frac{4}{3}\right)^k$ 增长,如下所言:

定理 10.6 对所有的 $j \geqslant 0$,从类 $m(\bmod 3^j)$ 的单一个体开始的分支过程 $\mathscr{B}[3^j]$ 的个体 $M_k(\omega)$ 的计数满足

$$\lim_{k\to\infty} M_k(\omega)\left(\frac{3}{4}\right)^k = eW_m(a.s.), \quad (10.3.12)$$

这里 $e = \{1,1,\cdots,1\}$ 是此个体类型上的均匀分布,而 $\mathbf{W}_m$ 是一个随机标量且满足

$$\mathrm{Prob}[a < W_m < b] = \int_a^b w_m(x)dx,$$

其中 $w_m(x)$ 在区间 $(0,\infty)$ 内是严格正的.

证 设 $E_j^{(b)}$ 表示过程 $B[3^j]$ 中奇偶位 $b = 0$ 或 1 的后代分支概率的转移矩阵. 基础的多类 Galton — Watson 过程的平均矩阵是

$$E_j = E_j^{(0)} + E_j^{(1)}$$

即，$E_j[k,l]$ 是从类 l 的一个体产生类 k 的子孙的期望值.

引论 对每个 j,E_j 有最大特征值$\frac{4}{3}$，它是简单的且有左特征向量 $e = \{1,1,\cdots,1\}$.

证 矩阵 $E_j^{(0)}$ 是由 $m \to 2m(\bmod 3^j)$ 的置换阵，因此有一左特征向量 e，特征值为 1. 矩阵 $E_j^{(1)}$ 每列的和等于$\frac{1}{3}$，这是因为对每一满足条件 $m \not\equiv 0(\bmod 3)$ 的 $m(\bmod 3^j)$，等式 $m \equiv (2n-1)/3(\bmod 3^j)$ 恰有一解 $n(\bmod 3^{j+1})$，因此它有左特征向量 e，特征值为$\frac{1}{3}$，于是 E_j 有左特征向量 e，特征值为$\frac{4}{3}$.

现在只要证明 E_j 是严格正的(也称原始的)，即 E_j 的某次幂的所有元素是正的就行了，因为如果这样，那么 Perron — Frobenius 定理保证 E_j 只有一个最大模的实特征值，此特征值有一正的实特征向量，且此特征值是有一正实特征向量的唯一特征值，因此$\frac{4}{3}$一定是最大特征值.

为证明 E_j 是严格正的，先注意到 $E_j^{(0)}$ 中的排列是循环的，因为对所有的 j,2 是一个原根$(\bmod 3^j)$；其次，$E_j^{(1)}$ 有固定点 $-1(\bmod 3^j)$. 因此对 $L = 4 \cdot 3^{j-1}$，$(E_j^{(0)} + E_j^{(1)})^L$ 的所有元素是正的. 引论证毕.

由以上引论及其证明过程可知，对所有的 j，过程 $\mathscr{B}[3^j]$ 是超临界的正正则的和非奇异的(文[16]的提法). 现在定理 10.6 可直接从文[16]的定理 1 和定理 2 得到. 定理 10.6 证毕.

表 10.2　分支过程 $\mathscr{B}[3^j]$($j = 0,1,2$) 的转移矩阵

	$\mathbf{E}_i^{(0)}$	$\mathbf{E}_i^{(1)}$
(a)	$\mathscr{B}[1]$	
	$\mathbf{E}_0^{(0)} = [1]$	$\mathbf{E}_0^{(1)} = [1/3]$
(b)	$\mathscr{B}[3]$	

$\mathbf{E}_1^{(0)} =$

	1	2
1	0	1
2	1	0

$\mathbf{E}_1^{(1)} =$

	1	2
1	0	0
2	1/3	1/3

(c) $\mathscr{B}[9]$

$\mathbf{E}_2^{(0)} =$

	1	4	7	2	5	8
1				1	0	0
4		0		0	0	1
7				0	1	0
2	0	1	0			
5	1	0	0		0	
8	0	0	1			

$\mathbf{E}_2^{(1)} =$

	1	4	7	2	5	8
1						
4		0			0	
7						
2	1/3	1/3	1/3	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	1/3	1/3	1/3

推论 10.1 对所有的 $j \geqslant 0$，分支过程 $\mathscr{B}[3']$ 有

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\log N_k(\omega)}{k} = \delta_{BP}(a.s.),$$

其中 $\delta_{BP} = \log \frac{4}{3}$.

证 由于 $w_m(x) = 0$，则从定理 10.6 知此推论成立.

第 k 代成员的期望位置是什么？按照(10.3.9)式，这由期望密度比决定. 我们现在先证明一个结果，由此结果可得对于 $\mathscr{B}[1]$，期望密度比约为 $\frac{1}{4}$.

定理 10.7 对分支随机移动 $\mathscr{B}[1]$，令

$$V_k(\omega) = k \sum_{i=1}^{N_k(\omega)} r(\omega_{k,i}),$$

它是树 $\mathscr{T}_k(\omega)$ 中各路径的叶子上的奇偶位之和. 则有

$$E[N_k] = \left(\frac{4}{3}\right)^k,$$

$$E[V_k] = \frac{1}{4} k E[N_k] = \frac{1}{4} k \left(\frac{4}{3}\right)^k.$$

证 考察树 $\mathscr{T}_k(\omega)$ 的根结点. 它以 $\frac{2}{3}$ 的概率有奇偶位为 0 的一单边和树 $\mathscr{T}_{k-1}(\omega_1)$ 相连，而以 $\frac{1}{3}$ 的概率有奇偶位分别为 0 和 1 的两条线边与两棵树 $\mathscr{T}_{k-1}(\omega_1)$ 和 $\mathscr{T}_{k-1}(\omega_2)$ 相连. 这就给出了递归式

$$E[N_k] = \frac{2}{3} E[N_{k-1}] + \frac{1}{3}(2E[N_{k-1}]),$$

$$E[V_k] = \frac{2}{3} E[V_{k-1}] + \frac{1}{3}(2E[V_{k-1}] + E[N_{k-1}]),$$

利用 $E[N_0] = 1$ 和 $E[V_0] = 0$，解得 $E[N_k] = \left(\frac{4}{3}\right)^k$ 和 $E[V_k] = \frac{1}{4} k E[N_k] = \frac{1}{4} k \left(\frac{4}{3}\right)^k$. 定理得证.

对 $\mathscr{B}[1]$，将一个 Chernoff 界用于分支随机移动，除了一个具有指数形式的小分数外，$\{r(\omega_{k,i}) | 1 \leqslant i \leqslant N_k(\omega)\}$ 落在区间 $\left[\frac{1}{4}-\varepsilon, \frac{1}{4}+\varepsilon\right]$；这可与文[19]相比较. 毫无疑问，对所有的 $\mathscr{B}[3^j]$ 类似的结果成立.

Kingman[24]证明一个单类型 Crump — Mode 过程的任何实现 ω 几乎肯定有一个渐近首次出生，此出生是一个取决于此过程的常数 β. Biggins[18]将此结果扩展到多分支随机移动. 运用 Biggins 方法，可得到以下结果：

定理 10.8 存在一个常数 β_{BP}，使得对所有 $j \geqslant 0$，分支过程 $\mathscr{B}[3^j]$ 有渐近第一出生

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} L_k^*(\omega) = \beta_{BP}(a.s.), \tag{10.3.13}$$

这里常数 $\beta_{BP} \approx 0.02399$ 由 $\beta_{BP} > 0$ 和

$$\tilde{g}(\beta_{BP}) = 0 \tag{10.3.14}$$

唯一确定，其中

$$\tilde{g}(a) = -\sup_{\theta\leqslant 0}\left(a\theta - \log\left(2^\theta + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^\theta\right)\right). \tag{10.3.15}$$

此定理表明存在一个类似于 γ 的分支过程停止常数 γ_{BP}，其定义是

$$\begin{aligned}\gamma_{BP} &= \limsup_{k\to\infty} \frac{k}{L_k^*(\omega)}(a.s.) \\ &= (\beta_{BP})^{-1}\end{aligned} \tag{10.3.16}$$

证 定理 10.6 的证明表明，过程 $B[3^j]$ 是超临界的、正正则的. 因此 Biggins[18]的主要结果适用且表明(10.3.13)式对依赖于过程 $\mathscr{B}[3^j]$ 的常数 β_j 成立.

为计算 β_j，我们象 Biggins 一样，找出一个与 $\mathscr{B}[3^j]$ 有关的 Laplace 变换矩阵 $\Phi^{(j)}(\theta)(\theta \geqslant 0)$ 如下，令 Z_n^1 表示由类 n 的一个体出生的点过程，$E_m[\cdot]$ 表类 m 所有个体的期望值. 则 $\Phi^{(j)}(\theta)$ 的元素为

$$\Phi_{mn}^{(j)} = E_m\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta t} dZ_n^1(t)\right]$$
$$= \exp(-(\log 2)\theta)E_j^{(0)}$$
$$+ \exp(-(\log 2 - \log 3)\theta)(E_j^{(0)} + E_j^{(1)}).$$

定理 10.6 的证明表明 $E_j^{(0)}$ 和 $E_j^{(1)}$ 都有特征向量 $e = (1,1,\cdots,1)$，其特征值分别为 1 和 $\frac{1}{3}$. 因此容易证明(象在定理 10.6 的引论)对所有 $\theta \geqslant 0$，$\varphi(\theta)$ 是严格正的矩阵，且仅有一个与特征向量 e 对应的最大特征值：

$$\varphi(\theta) = \exp(-(\log 2)\theta + \frac{1}{3}\exp(-(\log 2 - \log 3)\theta)$$
$$= 2^{-\theta}\left(1 + \frac{1}{3}3^{\theta}\right).$$

因为常数 β_j 独立于函数 $\varphi(\theta)$，而 $\varphi(\theta)$ 独立于 j，且 β_j 不依赖于 j，因此 β_j 是一个常数 β_{BP}，*Biggins* 定义

$$\mu(a) = \inf\{e^{\theta a}\varphi(\theta) \mid \theta \geqslant 0\} \tag{10.3.17}$$

且证明了

$$\beta_{BP} = \inf\{a \mid \mu(a) \geqslant 1\} \tag{10.3.18}$$

通过取对数，我们有

$$\tilde{g}(a) = \log\mu(a) = \inf_{\theta\geqslant 0}\{a\theta + \log\varphi(\theta)\}$$
$$= -\sup_{\theta\geqslant 0}\{-a\theta - \log\varphi(\theta)\}$$
$$= -\sup_{\theta\leqslant 0}\{a\theta - \log\widetilde{M}(\theta)\},$$

其中

$$\widetilde{M}(\theta) = \exp((\log^2)\theta) + \frac{1}{3}\exp((\log\frac{2}{3})\theta)$$
$$\equiv \varphi(-\theta) \tag{10.3.19}$$

是 $B[1]$ 的一个体的后代位置的即时生成函数. 容易验证 $\tilde{g}(a)$ 在区间 $(-\log\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\log\frac{16}{3}]$ 连续、严格单增且在区间 $[\frac{1}{4}\log\frac{16}{3}, \infty]$ 的值为常数 $\tilde{g}(a) = \log\frac{4}{3}$. 取 $a = 0, \theta = 1 + \varepsilon$ 可得 $\tilde{g}(0) < 0$；因

此存在唯一值 $\beta>0$ 使得 $\tilde{g}(\beta)=0$. 故 $\mu(\beta)=1$;再由(10.3.18)式,得 $\beta=\beta_{BP}$. 定理证毕.

我们现能考虑更复杂的分支随机移动 $\mathscr{B}[3^j,d]$,它们对深为 d 的树完全模拟 3N + 1 的逆映射. 对给定的剩余类的 $m(\mathrm{mod}3^j)$,以 3^{-d} 的概率均匀选择满足条件 $\tilde{m}=m(\mathrm{mod}3^j)$ 的剩余类 $\tilde{m}(\mathrm{mod}3^{j+d})$,并指定树 $(C^*)^{-d}(\tilde{m})$,其所有叶子(后代)已确定 $(\mathrm{mod}3^j)$. 叶子由从 $(C^*)^{-d}(\tilde{m})$ 的根开始的标有奇偶标记的一个序列 $\{x_1,x_2,\cdots,x_d\}$ 唯一确定,且指定其位置为 $d\log2-(x_1+x_2+\cdots+x_d)\log3$. 可以证明,该过程的 Laplace 变换矩阵有最大特征值 $(\frac{4}{3})^d$,且对应的特征值函数为 $\varphi_d(\theta)=[\varphi(\theta)]^d$,因此,对这些过程,与定理 10.8 类似的定理也成立.

由分支过程 $\mathscr{B}[3^j]$ 产生的树与由 3N + 1 函数产生的树的不同之处在于前者有更多的可变性. 任何 3N + 1 过程树 $\mathscr{T}_d^*(m)$ 可由 $m(\mathrm{mod}3^{d+1})$ 的同余类确定,因此至多有 $2\cdot3^d$ 棵被标记了不同边的对 $\mathscr{T}_d^*(m)$. 相反的是由分支随机移动 $\mathscr{B}[3^j]$ 获得的深为 d 的树的总数当 $d\to\infty$ 时至少为 $\exp(\exp c_jd)$(其中 c_j 是某个正常数).

分支随机移动 $\mathscr{B}[3^j]$ 的 k 代"最后出生"类似于 3N + 1 函数的变量 $H^+(k)=\max\{n|t_t(n)=k\}=2^k$ 的对数,容易直接验证这种类似是完美的,因为对每个 $\mathscr{B}[3^j]$,第 k 代的"最后出生"是在位置 $k\log2$ 处.

11　两种随机模型(续)

11.1　两种随机模型间的关系

独立的随机移动模型是从 n 开始按照 n 的增加顺序描述 3N + 1 问题，而分支随机移动模型则是从 n 开始按照 $t_i(n)$ 增加的顺序描述 3N + 1 问题的，这两种顺序是很不相同的. 对第一种顺序，在独立随机移动过程中一个"随机"数 n 的轨迹的密度比约为 $\frac{1}{2}$；而对分支随机移动模型 $\mathscr{B}[3^j]$，其结果的顺序方向为深度 k(对应于 $t_i(n)$)增加的方向，在一轨迹中对根结点的密度比约为 $\frac{1}{4}$(定理10.7). 除了顺序的不同，分支过程模型还综合不同个体之间的相关性，而独立随机移动模型则不.

然而，这两种模型因有相同的渐近性态 $\gamma_{RW} = \gamma_{BP}$ 而互相关联，这种关联是由它们的即时生成函数产生的. 独立随机移动模型的步长 X 有即时生成函数

$$M_{RW}(\theta) = E[e^{\theta Z^1}] = \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^{\theta} + \frac{1}{2}(\frac{3}{2})^{\theta}. \quad (11.1.1)$$

而在分支随机移动模型 $\mathscr{B}[1]$ 中，对于出生位置的点过程 Z^1 有即时生成函数

$$M_{BP}(\theta) = E[e^{\theta Z^1}] = 1 \cdot 2^{\theta} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\theta}. \quad (11.1.2)$$

上式对 $\mathscr{B}[3^j]$ 成立取决于偶发事件；$M_{BP}(\theta)$ 为即时生成矩阵 $\Phi^{(j)}(\theta)$ 的最大特征值(见10.3.19)式.

$M_{BP}(\theta)$ 与 M_{RW} 两者的对偶关系是

$$M_{BP}(\theta) \equiv M_{RW}(-\theta-1). \qquad (11.1.3)$$

在映射 $\theta \to -1-\theta$ 是一对合关系的意义下这是一对偶．更一般地可以定义两个点过程是对偶的，如果它们的即时生成函数满足关系(11.1.3)式．

我们用对偶关系推出下面的结果：

定理 11.1 $\gamma_{RW} = \gamma_{BP}$.

证 关于 γ_{RW} 和 γ_{BP} 的公式分别在 10.2 段和 10.3 段推出，它们是由适当的即时生成函数的 Legendre 变换给出的．定理 10.1 断言 $\gamma_{RW} > \left(\frac{1}{2}\log\frac{4}{3}\right)^{-1}$ 且满足

$$g\left(\frac{1}{\gamma_{RW}}\right) = \frac{1}{\gamma_{RW}},$$

其中

$$g(a) = \sup_{a\in R}(a\theta - \log M_{RW}(-\theta)),$$

注意 $M(\theta) = M_{RW}(-\theta)$．定理 10.8 断言 $\gamma_{BP} > 0$ 是方程

$$\tilde{g}\left(\frac{1}{\gamma_{BP}}\right) = 0$$

的唯一正解，其中

$$\tilde{g}(a) = -\sup_{a\leqslant 0}(a\theta - \log M_{BP}(\theta)), \qquad (11.1.4)$$

注意 $\tilde{M}(\theta) = M_{BP}(\theta)$．当 $a \in \left(0, \frac{1}{4}\log\frac{16}{3}\right)$ 时我们可用 Legendre 变换

$$\tilde{g}(a) = -\sup_{a\in R}(a\theta - \log M_{BP}(\theta)), \qquad (11.1.5)$$

代替(11.1.4)式．上式可利用(11.1.2)式得到．于是由对偶关系 $M_{RW}(\theta) = M_{BP}(-\theta-1)$ 可得

$$\tilde{g}(a) = -g(a) + a. \qquad (11.1.6)$$

上式对 $a \in \left(0, \frac{1}{2}\log\frac{16}{3}\right)$ 成立．因为 $1/\gamma_{RW}$ 和 $1/\gamma_{BP}$ 都落在这个区间且 $\tilde{g}(a)$ 是单调增的，因而由上式便可得到 $1/\gamma_{RW} = 1/\gamma_{BP}$，即 $\gamma_{RW} = \gamma_{BP}$．定理得证．

现在我们利用对偶关系证明当由分支随机移动模型 $\mathscr{B}[1]$ 的实现产生的个体依增加的次序排列时，它们的分布类似于独立随机移动过程开始位置 $\exp Z^*(n, 0)$ 的分布，此分布对每个 $n=1, 2, 3, \cdots$ 包括一个个体.

定理 11.2 对过程 $\mathscr{B}[1]$ 的一个实现，令

$$I^*(t, \omega) = \#\{\omega_{k,j} | S(\omega_{k,j}) \leqslant t\}$$

表示大小 $S(\omega_{k,j}) \leqslant t$ 的子孙的个数，则几乎可以肯定地有

$$I^*(t, \omega) = t^{1+o(1)} \quad (\text{当 } t \to \infty \text{ 时}) \qquad (11.1.7)$$

证 为估计 $I^*(t, \omega)$，我们考虑

$$I_k^*(t, \omega) = \#\{\omega_{k,j} | k \text{ 固定且 } S(\omega_{k,j}) \leqslant t\}.$$

令 $a = k/\log t$. 首先可以看出，对 $a \leqslant \frac{1}{4}\log\frac{16}{3}$，有以下估计

$$\begin{aligned} I_k^*(t, \omega) &\leqslant N_k(\omega) \leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^{k(1+o(1))} \\ &\leqslant t^{a_c(1+o(1))} \quad (\text{当 } t \to \infty \text{ 时}), \end{aligned} \qquad (11.1.8)$$

其中 $a_c = \frac{1}{4}\left(\log\frac{16}{3}\right)\left(\log\frac{4}{3}\right) \approx 0.120393$（见定理 10.6）. 这些个体对(11.1.7)式的作用是微乎其微的.

对于剩下的范围 $a > \frac{1}{4}\log\frac{16}{3}$，$I_k^*(t, \omega)$ 计量"末尾部分"，它能用 Biggins[19] 的 Chernoff 界估计. 我们几乎可以肯定得到

$$\begin{aligned} I_k^*(k, \omega) &= \left(\mu\left(\frac{1}{a}\right)\right)^{k(1+o(1))} \\ &= t^{a\tilde{g}(1/a)(1+o(1))} \quad (\text{当 } t \to \infty \text{ 时}), \end{aligned} \qquad (11.1.9)$$

其中 $\mu(a)$ 由(10.3.17)给出. 利用包含在(11.1.6)式的对偶关系，对 $a > \frac{1}{4}\log\frac{16}{3}$，有

$$a\tilde{g}\left(\frac{1}{a}\right) = a\left(\frac{1}{a} - g\left(\frac{1}{a}\right)\right) \leqslant 1, \qquad (11.1.10)$$

且由引理 10.2 知当 $a=\left(\frac{1}{2}\log\frac{4}{3}\right)^{-1}$ 时上式中的等号成立. 因此 $k=\left(\frac{1}{2}\log\frac{4}{3}\right)^{-1}\log t$, 且由(11.1.9)式知

$$I^*(t,\omega)\geqslant I_k^*(t,\omega)\geqslant t^{1+o(1)}\quad(\text{当 } t\to\infty \text{ 时})$$

几乎肯定成立. 最后利用(11.1.8)式～(11.1.10)式, 有

$$\begin{aligned}I^*(t,\omega)&\leqslant(60\log t)\max\{I_k^*(t,\omega)\mid 0\leqslant k\leqslant 50\log t\}\\&\leqslant t^{1+o(1)}\quad(\text{当 } t\to\infty \text{ 时})\end{aligned}$$

几乎肯定成立.

可以检验, 由分支过程模型 $\mathscr{B}[1]$ 产生的大小接近于一给定值的个体有密度比 $\frac{1}{2}$, 这是对独立随机移动模型的样品的期望值. 实际上, $a=\left(\frac{1}{2}\log\frac{4}{3}\right)^{-1}$ 对应的密度比 $r(a)=\frac{1}{2}$. 可以证明密度比

$$r^*(t,\omega)=\frac{1}{I^*(t,\omega)}\sum_{k,j}\{r(\omega_{k,j})\mid S(\omega_{k,j})\leqslant t\}$$

当 $t\to\infty$ 时, 几乎肯定有 $r^*(t,\omega)\to\frac{1}{2}$.

对于任意一对对偶分支随机移动, 只要对它们的期望步长值及符号条件附加某些额外的限制, 就有与定理 11.1 和 11.2 类似的定理. 这些附加的限制条件对完成(11.1.4)式和(11.1.5)式的证明是必要的.

11.2 3N + 1 函数的某些经验结果

我们现在把 10.2 段和 10.3 段中随机模型的预测同 3N + 1 函数迭代的实际性态用 $t(n)$ 和 $t_t(n)$ $(n\leqslant 10^{11})$ 的连续最大值的表(即表 11.1)的形式进行比较, 表中的计算结果是文[25]提供的.

表 11.1 给出了每个区间 $[10^k, 10^{k+1}]$ $(1\leqslant k\leqslant 10)$ 上 $\log t(n)/\log n$ 的最大值. 数据看上去和随机移动模型的预测值 ρ_{RW}

$=2$ 很一致．此表还给出了 $t_i(n)/\log n$ 和 $t_{\max}(n)/\log n$ 的值，其中

$$t_{\max}(n)=\min\{k \mid C^k(n)\geqslant C^l(n),\ l=0,1,2,\cdots\}.$$

表 11.1　区间 $[10^k,10^{k+1}]$ 上 $\frac{\log t(n)}{\log n}$ 的最大值

k	n	$\frac{\log t(n)}{\log n}$	$\frac{t_{\max}(n)}{\log n}$	$\gamma(n)$
1	27	2.560	13.65	21.24
2	703	1.791	7.32	16.48
3	9,663	1.790	2.83	12.86
4	77,671	1.819	3.46	13.14
5	704,511	1.788	2.75	11.59
6	6,631,675	1.976	5.86	23.05
7	80,049,391	1.903	5.06	19.84
8	319,804,831	2.099	4.65	19.10
9	8,528,817,511	1.909	5.20	20.03
10	77,566,362,559	1.897	6.86	19.02
随机移动模型		2.000	7.645	21.55

回顾随机移动模型的预测：$t_i(n)\approx 21.55\log n$，$t_{max}(n)\approx 7.645\log n$（渐近地），其中的 n 满足 $t(n)=n^{2+o(1)}$（当 $n\to\infty$ 时）．另外，这样的 n 的轨迹的对数图应和斜率确定的两直线段接近．图 11.1 针对表 11.1 中的 n 画出了用对数表示的去鳞般的轨迹图 $(k/\log n,\ \log C^k(n)/\log n)$，其中对应于 $1\leqslant k\leqslant 5$ 的轨迹是用点线画出的，对应于 $6\leqslant k\leqslant 10$ 的轨迹是用实线画出的，而由随机移动模型预测的有限轨迹则用虚线画出，它看上去和经验数据吻合得比较好．

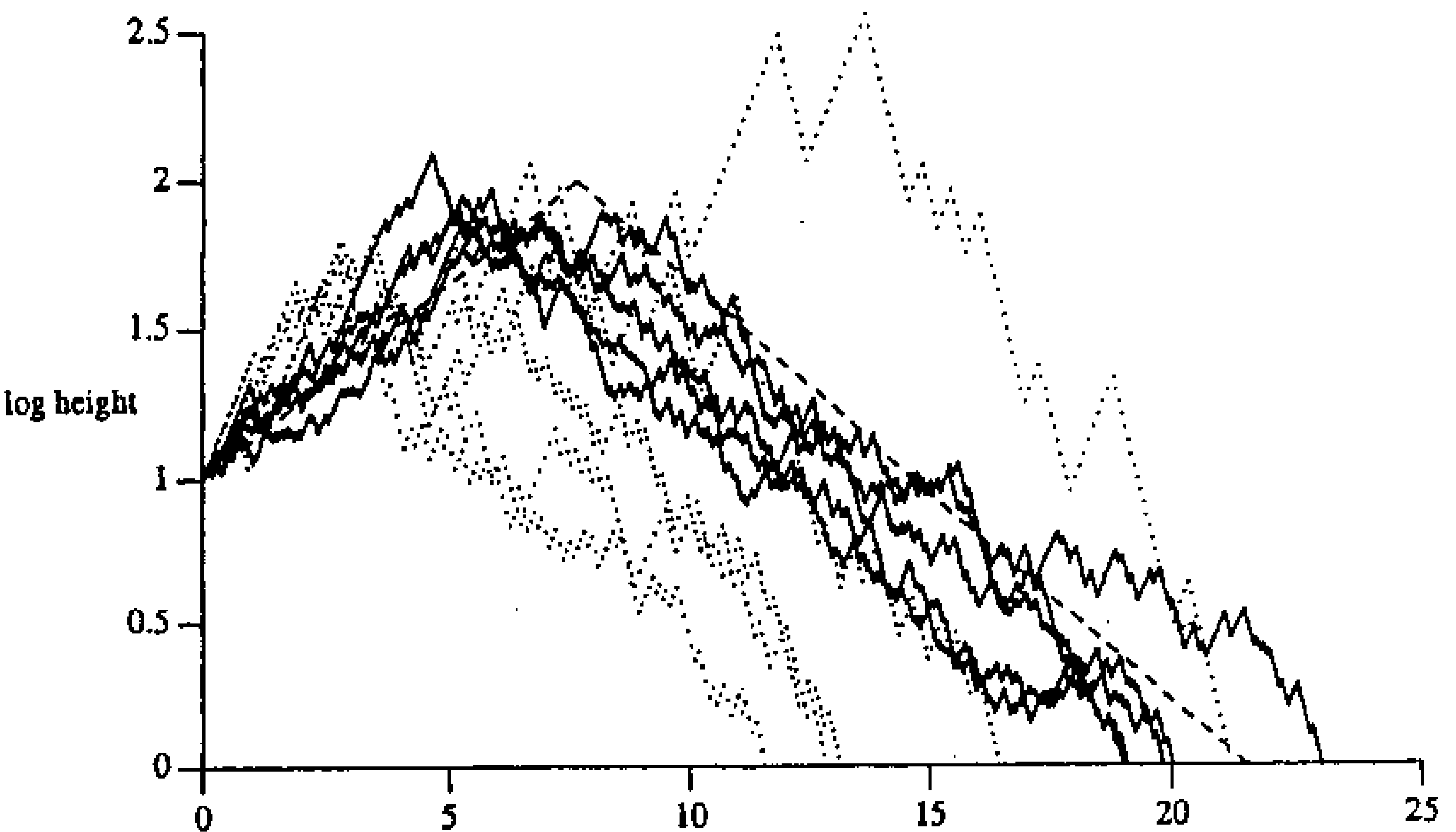


图 11. 1 $(k/\log n,\ (\log C^{k}(n))/\log n)$轨迹图

表 11.2 给出了 $\gamma(n)=t_t(n)/\log n$ 在每个区间 $10^k<n\leqslant 10^{k+1}(1\leqslant k\leqslant 10)$ 所取得的最大值. 除去最小值 $n_0=27$，值 $\gamma(n)$ 稳定增长，达到一个可能的平衡值，约为 32，比猜想 1 预测的要小. 这和猜想 1 冲突了吗?大偏差理论预测:极值轨迹的图形粗略看上去是斜率为 -0.024 的直线. 图 11.2 针对表 11.2 中的 n 画出了用对数表示的去鳞般的轨迹图，其中对应于 $1\leqslant k\leqslant 5$ 的轨迹是用点线画出的，对应于 $6\leqslant k\leqslant 10$ 的轨迹是用实线画出的，而由随机移动模型预测的有限轨迹则用虚线画出.

表 11.2　区间$(10^k, 10^{k+1}](1\leqslant k\leqslant 10)$ 上 $\gamma(n)$ 的最大值

k	n	$t_t(n)$	$\gamma(n)$	$r(n)$
1	27	70	21.24	0.5857
2	703	108	16.48	0.5741
3	6,171	165	18.91	0.5818
4	52,527	214	19.68	0.5841
5	837,799	329	24.13	0.5297
6	8,400,511	429	26.91	0.5967
7	63,728,127	592	32.94	0.6030
8	127,456,254	593	31.77	0.6020
9	4,890,328,815	706	31.64	0.6020
10	13,371,194,527	755	32.38	0.6026
随机移动模型			41.68	0.6091

我们称预测的极值的直线路径为“火车轨道”，这是文[35]提出的. 有一著名论点:对常系数随机移动，去做未必能成功的事情的最好办法是选取一个适合的速度，就象火车爬山一样. 类似于火车，轨道达到最高(如图 11.1)，但不是最长(如图 11.2)，因为它们在爬山过程中消耗了能量，然后必定很快冲下，而一个更平缓的路径会支持它们走得更远.

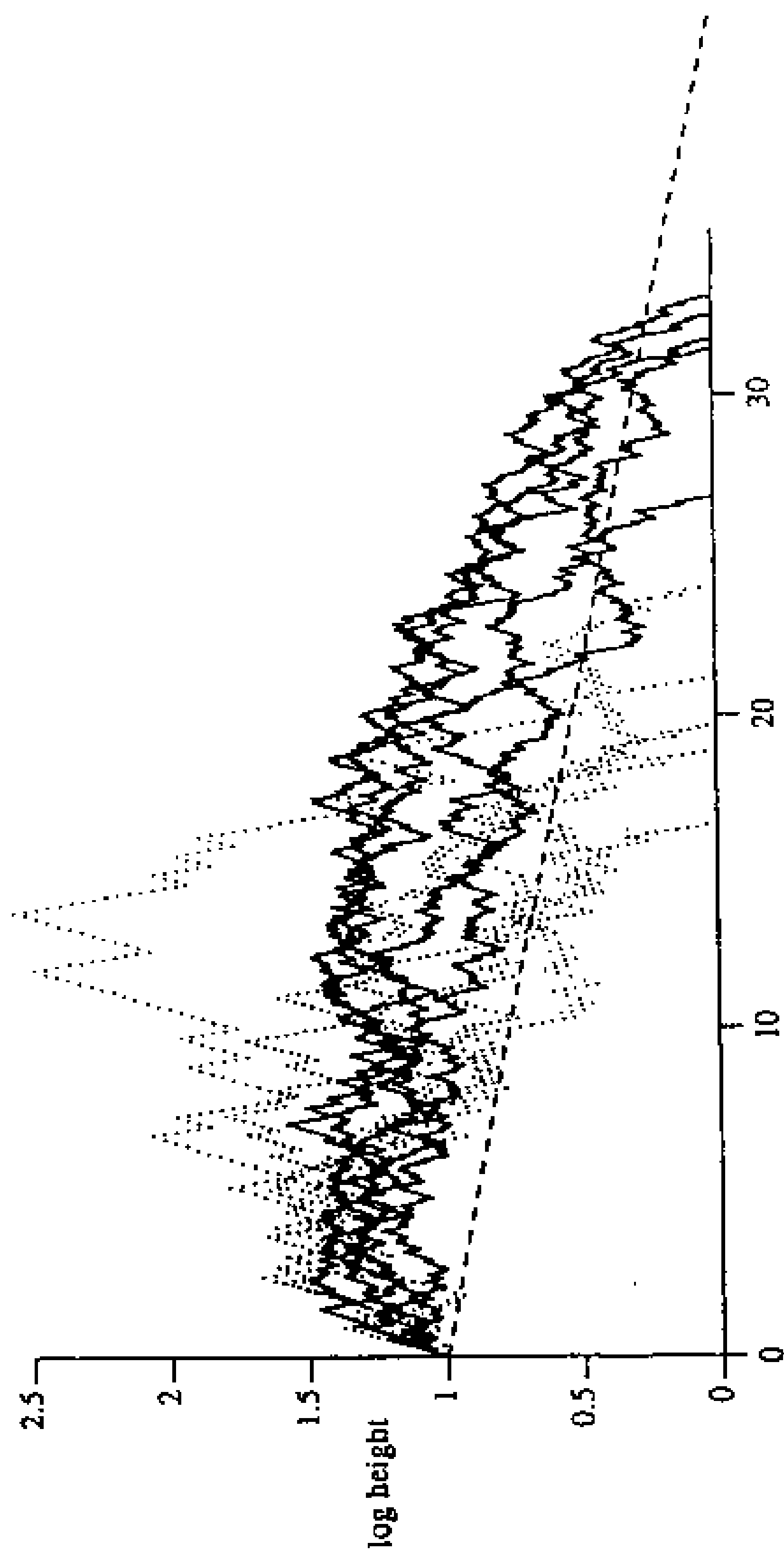


图 11.2　使 $Y(n)$ 最大的 n_k 的轨迹

实际的极值轨迹性态(图 11. 2)看上去有三段不同的情况：第一段是初始上升段;第二段是一个长的"火车轨道"段；第三段是快速下冲段. 这不同于预测的"火车轨道"，但稍加分析可知并不产生矛盾. 既然这些轨迹是极值轨迹，它们一定有一个初始上升，否则存在一个具有更低开始点的轨迹会是更好的极值轨迹. 最后的下冲是一些小数值($\leqslant 10^6$)的非随机行为造成的，没有使得 $t_t(n)>24.15\log n$ 的 n 值. 鉴于这些理由我们认为表 11. 2 的数据和猜想 10. 1 是一致的.

在下段我们将用逆迭代进一步检查"火车轨道".

11. 3 寻找大停止次数的贪心算法

文[35]提出了"贪心"算法，它是通过逆向搜寻以寻找使 $t_t(n)/\log n$ 取得大值的大 n 的方法.

贪心算法 $\mathscr{G}_d^*$　令 $m_0=4$，并选 m_{kd} 为 $(C^*)^{-d}(m_{(k-1)d})$ 中的最小元素，即树 $\mathscr{T}_d^*(m_{(k-1)d})$ 中的最小叶子标记，递归地求得 $\{m_{kd}\mid k\geqslant 0\}$.

由此算法定出的轨迹展示了"火车轨道"的性态，它有一个依赖于树的寻求深度 d 的特征斜率.

我们可以为 10. 3 段的分支过程用类似的贪心算法模拟贪心算法的性态.

贪心算法 $\mathscr{G}_d[3^j]$　给定分支随机移动 $\mathscr{B}[3^j]$ 的一个实现 ω，按照取 ω_0^* 是根，取 ω_{kd}^* 是 $\omega_{(k-1)d}^*$ 的所有后代中高度最小树 $\mathscr{T}(\omega)$ 的第 kd 层结点来求得 $\{\omega_{kd}^*\mid k\geqslant 0\}$. (在相关情况下，选择 ω_{kd}^* 是第 kd 层结点的排列 $\omega_{kd,j}$ 中的第一个结点).

这些算法的实施对 d 和 j 的固定值原则上可准确分析出来.

定理 11. 3　对算法 $\mathscr{G}_d[1]$，存在常数 $\{\beta(d)\mid d=1,2,\cdots\}$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{kd}L(\omega_{kd}^*) = \beta(d)(a.\ s.\ ), \qquad (11.3.1)$$

从而有

$$\lim_{d\to\infty}\beta(d) = \beta_{BP}. \qquad (11.3.2)$$

证 先推导(11.3.1)式. 过程$\{\omega_{kd}^*\}$的每一步包括独立地画出一棵由$\mathscr{B}[1]$生成的根在$\omega_{(k-1)d}^*$的深度为d的树，从而选择ω_{kd}^*是从$\omega_{(k-1)d}^*$开始的使得$L(\omega_{kd}^*) - L(\omega_{(k-1)d}^*)$取得最小值的那个分支的最后一个元素. 中心极限定理表明$\beta(d)$存在且是此随机变量的最小位置比的期望值. (11.3.2)式极限的存在和其值为β_{BP}的结论可从文[18]的定理4得到. 定理得证.

定理11.3的一个等价形式是存在极限密度比$\{r(d)\,|\,d = 1, 2, \cdots\}$使得

$$\lim_{k\to\infty}r(\omega_{kd}^*) = r(d)(a.\ s.\ ) \qquad (11.3.3)$$

且$\lim_{d\to\infty}r(d) = r_{BP} \approx 0.60909$. 此等价性可从关系式(10.3.10)式推得，同时还有

$$\beta(d) = \log 2 - r(d)\log 3 \qquad (11.3.4)$$

计算$r(d)$的值存在一个简单的递归，令

$$p_{d,j} = \mathrm{Prob}[\mathscr{T}_d(\omega)\text{ 的分支数} < j + 1],$$

则

$$r(d) = \sum_{j=1}^{d} j(p_{d,j} - p_{d,j+1}) = \sum_{j=1}^{d} p_{d,j}, \qquad (11.3.5)$$

这是因为$p_{d,d+1} = 0$.

过程$\mathscr{B}[1]$的定义隐含着$p_{d,j}$满足递推公式：

$$dp_{d,j} = \frac{2}{3}(d-1)p_{d-1,j} + \frac{1}{3}(d-1)^2 p_{d-1,j}p_{d-1,j-1}. \qquad (11.3.6)$$

由$p_{0,0} = 1$，我们能用此递推公式算出所有的$p_{d,j}$的值，并对较小的d求出$r(d)$. 表11.3列出了$r(d)$的值及用这种方法得到的有关停止次数估计值$\gamma_d = \beta(d)^{-1}$.

对 $d \geqslant 3$，$r(d)$ 的值呈严格单调增的特征，但目前还无法从理论上加以证明. $r(d)$ 还具有次可加性：

$$dr(d) \geqslant jr(j) + (d-j)r(d-j),\ 1 \leqslant j \leqslant d-1. \tag{11.3.7}$$

用此式可以证明当 $34 \leqslant d \leqslant 68$ 时有 $r(d) > \frac{1}{2}$.

表 11.3 $\mathscr{G}_d[1]$ 的概率贪心算法的极限密度

深度 d	密度比 $r(d)$	γ_d
1	0.33333	3.0586
2	0.33333	3.0586
3	0.33882	3.1161
4	0.34649	3.2001
5	0.35508	3.2999
10	0.39811	3.9095
20	0.45790	5.2606
30	0.49179	6.5420
40	0.51291	7.7126
50	0.52729	8.7825
100	0.56114	13.0438
200	0.58183	18.5376
400	0.59387	24.5634
600	0.59832	27.9213
800	0.60069	30.0124
1000	0.60216	31.6471
∞	0.60909	41.6776

表 11.3 给出的贪心算法 $\mathscr{G}_d[1]$ 的预测密度可以和表 11.2 的实际 3N + 1 数据相比较对表 11.2 中的最大值 n 进行 755 次迭代，得到 $\gamma(n) = 32.38$，而用 $\mathscr{G}_d[1]$ 贪心算法搜索到深度 800 而得到的预测常数为 30.01.

然而，贪心算法 $\mathscr{G}_d[1]$ 并没有给出算法 $\mathscr{G}_d^*$ 的特征的完全精

确模型. 这是因为当我们选择有许多奇偶位为 1 的项的序列 $\{\omega_{kd}^{*}\}$ 时，它们的值(mod3^j) 的分布不可能是均匀的分布，象模型 $\mathscr{B}[1]$ 假设的那样.

因此，我们研究的贪心算法 $\mathscr{G}_1[3^j]$，总是每次尽可能选择一个奇偶位为1的结点 ω_1^* 以产生一深度为1的最优树. 这种结点的选择产生一个 Markov 链，链中所有的状态不是等概率的. $j=1$ 和 2 的 Markov 链在表 11. 4 给出，同时给出了有关的产生稳态概率的左特征向量. $\mathscr{G}_1[3]$ 的密度比是 $r_1(1)=\frac{2}{5}=0.40000$，$\mathscr{G}_1[9]$ 的密度比是 $r_2(1)=\frac{3}{7}\approx 0.42857$. 对于 $\mathscr{G}_1[3^j](j\geqslant 3)$，没有什么新情况. 类 m(mod3^j) 的稳态向量对 m(mod9) 和 $r_j(1)=\frac{3}{7}(j\geqslant 3)$ 为 $3^{-(j-2)}$ 次.

显然 $\mathscr{G}_1[9]$ 给出了 3N + 1 问题的一步贪心算法 $\mathscr{G}_1^*$ 的定性的精确模型. 表 11. 5 给出了关于 $\mathscr{G}_1^*$ 的 7000 次迭代的统计数据，表明它与 Markov 链吻合得很好.

我们可以构造更复杂的 Markov 链来模拟贪心算法 $\mathscr{G}_d^*$ 的性态，"正确的"模型似乎是那样的 Markov 链(mod3^{d+1})，它从选择含有一深度为 d 的树的最大密度比的某个分支的算法产生，而该树是由过程 $\mathscr{B}[3^{d+1},d]$(在 10. 3 段末定义) 生成的. 这些模型非常精细，使得容易直接对 $\mathscr{G}_d^*$ 进行研究.

表 11.4　贪心算法的 Mrkov 链($d=1$)

	1	2
1	0	1
2	2/3	3/2

(a) $\mathscr{B}[3]$Markov 链，$\nu=\left\{\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right\}$

	1	4	7	2	5	8
1				1	0	0
4		0		0	0	1
7				0	1	0
2	1/3	1/3	1/3	0	0	0
5	1	0	0	0	0	0
8	0	0	0	1/3	1/3	1/3

(b) $\mathscr{B}[9]$Markov 链，$\nu=\left\{\frac{5}{21},\frac{2}{21},\frac{2}{21},\frac{2}{7},\frac{1}{7},\frac{1}{7}\right\}$

表 11.5　贪心算法 $\mathscr{G}_1^*$ 的经验密度

k	1	2	4	5	7	8	β
700	0.2379	0.2792	0.0997	0.1496	0.0912	0.1425	4.27
7000	0.2395	0.2863	0.0954	0.1418	0.0934	0.1435	4.52
预测密度	0.2381	0.2857	0.0952	0.1429	0.0952	0.1429	4.498
	$\frac{5}{21}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{7}$	

表 11.6 列出了贪心算法 $\mathscr{G}_d^*$ 的密度的经验数据，其中 $d=5$，10，15，20，25 用于构造值 m_{6000}，其第 6000 次迭代得到值 4. 表中 $\gamma(m_{6000})$ 的值可以同表 11.3 中 γ_d 的值相比较. 注意，由观察可知，表 11.6 中 $d=25$ 所对应的 $\gamma(m_{6000})$ 的值(8.05) 约与表 11.3 中 $d=45$ 所对应的 γ_d 的值相同.

表 11.6　适用于 $m_0=4$ 的贪心算法 $\mathscr{G}_d$

搜寻深度	$\log(m_{6000})$	$\gamma(m_{6000})$
5	1116.28	5.38
10	1043.29	5.75
15	849.93	7.06
20	808.20	7.43
25	745.56	8.05

文[35]用贪心算法找到了一个数 $n_0\approx 9.823\times 10^{160}$，满足 $t_t(n_0)=6000$，于是 $t_t(n_0)/\log n_0\approx 16.186$. 对于随机移动模型，定理 10.1 断言，满足 $e^{370}\leqslant n\leqslant e^{371}$ 的一"随机"n 有如此一大值 α 的概率 $\leqslant e^{-300}$. 因此，为找 $t_t(n)/log n$ 的极值，采用逆向搜索显然要比"随机"搜索有效得多.

12　3N+1 猜想的推广

12.1　推广的 $C(n)$ 函数的一般形式

前面讨论的通常迭代，伸长迭代和压缩迭代都是针对 3N+1 猜想的研究方法. 而 3N+1 本身是可以推广的. 由于 3N+1 猜想至今未得到理论上的证明，研究它的推广问题似乎是舍近求远，为时过早；但完全不探讨它的推广问题又似乎是坐井观天，局限思维. 看来在主攻 3N+1 猜想的同时探讨一下这个问题的推广是必要的，有益的. 鉴于此，在对 3N+1 猜想作了前面的讨论之后，本节就 3N+1 函数的推广和 3N+1 猜想的推广两个方面讨论 3N+1 问题的推广.

在通常迭代下，我们是根据 Collatz 函数(或称 3N+1 函数).

$$C(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2},\ n\equiv 0(\mathrm{mod}2)\\ \dfrac{3n+1}{2},\ n\equiv 1(\mathrm{mod}2)\end{cases}\tag{12.1.1}$$

来研究 $3N+1$ 猜想的. 分析这个函数的结构，容易将它推广为更一般的 Collatz 函数：

$$C(n)=\begin{cases}\dfrac{a_0n+b_0}{D},\quad \text{当}\ n\equiv 0\ (\mathrm{mod}D),\\ \dfrac{a_1n+b_1}{D},\quad \text{当}\ n\equiv 1\ (\mathrm{mod}D),\\ \cdots\\ \dfrac{a_{D-1}n+b_{D-1}}{D},\quad \text{当}\ n\equiv D-1\ (\mathrm{mod}D).\end{cases}\tag{12.1.2}$$

其中

$$\begin{cases} D \in N,\ 且\ D \geqslant 2, \\ a_i,\ b_i \in Z,\ a_i n + b_i \equiv 0(\bmod D)\ (i = 0,\ 1,\ 2,\ D-1). \end{cases}$$

(12. 1. 3)

若令 $h_i(n) = \dfrac{a_i n + b_i}{D}$，则

$$C(n) = \left\{h_i(n) = \frac{a_i n + b_i}{D},\ 当\ n \equiv i(\bmod D),\ 0 \leqslant i \leqslant D-1\right\}.$$

(12. 1. 4)

(12. 1. 2) 式或(12. 1. 4) 式的函数 $C(n)$ 称为推广的 Collatz 函数. 若令 $D = 2$，$a_0 = 1$，$b_0 = 0$，$a_1 = 3$，$b_1 = 1$，则得到(12. 1. 1) 式中的 Collatz 函数，即原始的 Collatz 函数. 由于满足条件(12. 1. 3)式的D和a_i，b_i有无穷多，则上述推广的Collatz 函数是相当复杂的，如何提“问题”或“猜想”得根据具体函数的特点而定. 例如函数

$$C(n) = \begin{cases} \dfrac{2n}{3},\ 当\ n \equiv 0\ (\bmod 3), \\ \dfrac{4n-1}{3},\ 当\ n \equiv 1\ (\bmod 3), \\ \dfrac{4n+1}{3},\ 当\ n \equiv 2\ (\bmod 3), \end{cases} \tag{12. 1. 5}$$

是其中的一个简单特例，它也是 L. Collatz 本人当年考察过的函数(见第 1 节的函数 $G(n)$). 依据此函数所得到的轨迹序列如：

$T(1) = \{1, 1, 1, \cdots\}$,

$T(2) = \{2, 3, 2, \cdots\}$,

$T(3) = \{3, 2, 3, \cdots\}$,

$T(4) = \{4, 5, 7, 9, 6, 4, \cdots\}$,

$T(8) = \{8, 11, 15, 10, 13, 17, 23, 41, 55, 73, \cdots\}$,

$T(12) = \{12, 8, \cdots\}$,

…

发现一个定点(1)，两个圈(2, 3, 2) 和(4, 5, 7, 9, 6, 4)，且不

知 $T(8)$ 是否有定点和圈. 研究者普遍认为 $T(8)$ 是无界的，即当 $k\to\infty$ 时 $C^k(8)\to\infty$. 由试验所得到的表 12. 1 支持了这一观点. 试验还表明，大于 9 的自然也有与 $T(8)$ 类似的性态. 因此，若对这个函数提出什么“猜想”的话，这猜想便是：任何自然数 n 经(12. 1. 5) 式的函数 $C(n)$ 迭代，要么得到定点(1)，要么得到圈(2，3，2) 或圈(4，5，7，9，6，4)，要么 $C^k(n)\to\infty(k\to\infty)$.

表 12. 1 $T(8)$ 的部分元素

k	$C^k(8)$	k	$C^k(8)$
0	8	20	161
1	11	30	717
2	15	40	796
3	10	50	1767
4	13	60	7849
5	17	70	69687
6	23	80	9668
7	31	90	5365
8	41	100	11908
9	55	200	34576499
10	73	300	196103289

这样的猜想不仅与 3N+1 猜想一样难以解决，而且由于猜想的结论变得复杂而会令人乏味。因此，下面我们只讨论将函数 C(n)改变，而不改变“迭代归 1”的猜想结论的一些情形。

3N+1 问题之所以难解决，当然完全是由于 3N+1 函数造成的。3N+1 函数看起来非常简单，但对于攻克 3N+1 猜想却是“太复杂”了。为了将问题从简单引向深人，我们先试将 3N+1 函

数

$$C(n)=\begin{cases}\frac{n}{2}, 若 n\equiv 0(\mathrm{mod}2),\\ 3n+1, 若 n\equiv 1(\mathrm{mod}2)\end{cases}\qquad(12.1.6)$$

改成简单的 **N+1 函数**(即 **1N+1 函数**)：

$$C(n)=\begin{cases}\frac{n}{2}, 若 n\equiv 0(\mathrm{mod}2),\\ n+1, 若 n\equiv 1(\mathrm{mod}2).\end{cases}\qquad(12.1.7)$$

再提出 **N+1 问题**(即 **1N+1 问题**)：

对任一自然数 n，是否存在有限的迭代次数 k，使得 $C^k(n)=1$?

容易证明，对这一问题的回答是肯定的，换句话说，**N+1 猜想**(即 **1N+1 猜想**)是正确的。

研究 3N+1 猜想时会研究这样的问题：任给 $H\in\mathrm{N}$，问有多少个自然数 $n\geqslant 2$，使得 n 的高 $h(n)=H$? 若记 $n(H)$为这样的 n 的个数，则此问题就是要求 $n(H)=\#\{n|C^H(n)=1|\}=$? 这里 C (n)是(12.1.6)式的 $C(n)$。经验证我们有

$n(1)=1$(数 2 是使 $C^1(n)=1$ 的唯一的 n)，

$n(2)=1$(数 4 是使 $C^2(n)=1$ 的唯一的 n)，

$n(3)=1$(对应 $n=8$)，

$n(4)=1$(对应 $n=16$)，

$n(5)=2(n=5、32)$，

$n(6)=2(n=10、64)$，

$n(7)=4(n=3、20、21、128)$，

$n(8)=4(n=6、40、42、256)$，

…

于是得到一个序列$\{n(H)\}$：

1，1，1，1，2，2，4，4，6，6，8，10，14，28，24，29，36，44，…　　(12.1.8)

此序列杂乱无章，目前无法找到求 $n(H)$ 的公式。

若将 C(n)换为(12. 1. 7)式的 N+1 函数，则有

$$n(1)=1(n=2),$$
$$n(2)=1(n=4),$$
$$n(3)=2(n=3、8),$$
$$n(4)=3(n=6、7、16),$$
$$n(5)=5(n=5、12、14、15、32),$$
$$\cdots$$

得到序列 $\{n(H)\}$ 为

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,\cdots \tag{12.1.9}$$

此序列竟是 Fibonacci 序列！这是偶然的巧合吗？不是，它可以证明[38]。此序列一般项 $n(H)$ 的公式由下面的式子给出：

$$\left.\begin{aligned}&n(1)=1,\\&n(2)=1,\\&n(H)=n(H-2)+n(H-1)(H=3,4,5,\cdots).\end{aligned}\right\} \tag{12.1.10}$$

我们再将 3N+1 函数改成 **N+3** 函数：

$$C(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2}，若\ n\equiv 0(\text{mod}2),\\ n+3，若\ n\equiv 1(\text{mod}2).\end{cases} \tag{12.1.11}$$

则 N+3 **猜想**正确，且对应的序列 $\{n(H)\}$ 为

$$1,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,\cdots \tag{12.1.12}$$

从第 2 项开始也是 Fibonacci 序列！

我们又将 3N+1 函数改成 **N+5** 函数：

$$C(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2}，若\ n\equiv 0(\text{mod}2),\\ n+5，若\ n\equiv 1(\text{mod}2).\end{cases}$$

(12.1.13)

则 N+5 猜想正确，且对应的序列$\{n(H)\}$为

$$1,1,1,2,5,3,4,7,11,18,29,47,76,\cdots \tag{12.1.14}$$

此序列从第 6 项开始与 Lucas 序列(Fibonacci 序列的推广)

$$1,3,4,7,11,18,29,47,76,\cdots$$

从第 2 项开始是完全相同的。

一般地，我们取 p 为任一奇素数，定义 N+p 函数为

$$C(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2}, & 若\ n\equiv 0(\bmod 2),\\ n+p, & 若\ n\equiv 1(\bmod 2).\end{cases} \tag{12.1.15}$$

则可以证明 N+p 猜想正确，且对应的序列$\{n(H)\}$:

$$n(1),n(2),n(3),n(4),n(5),\cdots$$

除去前面的有限项之后，是一 Fibonacci 类序列。

现在回到 3N+1 函数对应的(12.1.8)式的序列$\{n(H)\}$。人们自然要问:若 3N+1 猜想正确，那末此序列(除去前面有限项之外)也是某种(广义的)Fibonacci 类序列吗?或反过来问:若该序列(除去前面有限项外)是广义的 Fibonacci 序列，那末 3N+1 猜想正确吗?这都是有趣的值得研究的问题。

我们相信甚至希望 3N+1 猜想正确，这就如同相信甚至希望哥德巴赫猜想正确一样。试想想，若哥德巴赫猜想对 99%以上的偶数都正确，却只对几个偶数甚至一个偶数不成立，这不是“大煞风景”、令人惋惜吗?我们甚至还希望 5N+1 猜想、7N+1 猜想等等也正确，使得 1N+1 猜想、3N+1 猜想的成立不是孤立的，是可以推广的。

然而看看 5N+1 函数:

$$C(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2}, & 若\ n\equiv 0(\bmod 2),\\ 5n+1, & 若\ n\equiv 1(\bmod 2).\end{cases} \tag{12.1.16}$$

经验证很快发现，对 $n=13$，迭代序列

T(13)={13，66，33，166，83，416，208，104，52，26，13，…}

含有圈，且圈中没有数“1”。这说明 5N+1 猜想不正确，这当然不是我们所“希望”的。之所以如此，我们认为，这缘于 3N+1 函数的定义形式(12. 1. 6)式的缺陷，这种缺陷使得 3N+1 猜想不便推广。为弥补这一缺陷，我们将它改为新 **3N+1** 函数：

$$C_3(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{3}，若\ n\equiv 0(\mathrm{mod}3)；\\ \dfrac{n}{2}，若\ n\not\equiv 0(\mathrm{mod}3)\ 但\ n\equiv 0(\mathrm{mod}2)；\\ 3n+1，其它情形.\end{cases}\tag{12. 1. 17}$$

利用此 $C_3(n)$，求得数 1～8 的迭代序列为

1→T(1)={1，4，2，1，…}，

2→T(2)={2，1，…}，

3→T(3)={3，1，…}，

4→T(4)={4，2，1，…}，

5→T(5)={5，16，8，4，2，1，…}，

6→T(6)={6，2，1，…}，

7→T(7)={7，22，11，34，17，52，26，13，40，20，10，5，16，8，4，2，1，…}，

8→T(8)={8，4，2，1，…}。

将如此的迭代序列与 7. 1 段的伸长迭代序列相比，自然让人提出新的 3N+1 猜想：

新 3N+1 猜想　对任一 $n\in\mathbf{N}$，用(12. 1. 17)的函数 $C_3(n)$ 必能经过有限的 k 次迭代，使得 $C_3^k(n)=1$。

我们认为，以上的新 3N+1 猜想同原始的 3N+1 猜想相比并不逊色。而且可以推广地提出新 **5N+1** 猜想、新 **7N+1** 猜想等

等，以满足人们的“希望”。例如，新 **5N+1 函数**为：

$$C_5(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{5}, & 若\ n\equiv 0(\mathrm{mod}5);\\ \dfrac{n}{3}, & 若\ n\not\equiv 0(\mathrm{mod}5)\ 但\ m\equiv 0(\mathrm{mod}3);\\ \dfrac{n}{2}, & 若\ n\not\equiv 0(\mathrm{mod}5)\ 且\ n\not\equiv 0(\mathrm{mod}3),\\ & \quad 但\ n\equiv 0(\mathrm{mod}2);\\ 5n+1, & 其它情形.\end{cases}$$

(12. 1. 18)

这时若取 n=13，则

T(13)={13，66，22，11，56，28，14，7，36，12，4，2，1，…}

不含没有数“1”的圈。也尚未发现别的 n 的迭代序列含有“1”不在其中的圈的现象。故可提出新 5N+1 猜想。

类似地可以定义新 **7N+1 函数**，新 **9N+1 函数**等等，并可提出相应的新猜想。

一般地，设 p 为一奇素数，p_1，p_2，…，p_m 为小于或等于 p 的所有素数，且 $p_1(=p)>p_2>p_3>\cdots>p_m(=2)$，定义 N 上的 **pN+1 函数**为：

$$C_p(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{p}, & 若\ n\equiv 0(\mathrm{mod}p_1);\\ \dfrac{n}{p_2}, & 若\ n\not\equiv 0(\mathrm{mod}p_1),\ 但\ n\equiv 0(\mathrm{mod}p_2);\\ \cdots & \\ \dfrac{n}{p_m}, & 若\ n\not\equiv 0(\mathrm{mod}p_i)(i=1,2,\cdots,m-1),\\ & \quad 但\ n\equiv 0(\mathrm{mod}p_m);\\ pn+1, & 其它情形.\end{cases}$$

(12. 1. 19)

可提出以下的猜想：

新 pN+1 猜想　对任一 $n\in$ N，用(12. 1. 19)的函数 $C_p(n)$ 必能经过有限的 k 次迭代，使得 $C_p^k(n)=1$。

新 pN+1 猜想算是对新 3N+1 猜想的一个比较理想的推广。攻克新 3N+1 猜想也许比攻克原始 3N+1 猜想会容易一些，特别是攻克新 3N+1 猜想也许能为最后攻克原始 3N+1 猜想准备必要而充分的条件。如果真是这样，那么研究新 3N+1 猜想就显得很必要了。与此相关联，若令

$$f(n)=\lim_{p\to\infty}C_p(n),$$

问：对任一自然数 $n\geqslant 2$，是否存在有限的迭代次数 k，使得 $f^k(n)=1$？答案是肯定的，且 k 为 n 的所有素因数(包括重复的)的个数。

下面专门举例讨论推广的 Collatz 函数的两种标准形式及其对应的问题或猜想.

12. 2　推广的 $C(n)$ 函数的第一种标准形式

推广的 $C(n)$ 函数的第一种标准形式是：

$$C(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{D}, & n\equiv 0(\mathrm{mod}D),\\ \dfrac{(D+1)n-1}{D}, & n\equiv 1(\mathrm{mod}D),\\ \dfrac{(D+1)n-2}{D}, & n\equiv 2(\mathrm{mod}D),\\ \cdots & \\ \dfrac{(D+1)n-(D-2)}{D}, & n\equiv (D-2)(\mathrm{mod}D),\\ \dfrac{(D+1)n+1}{D}, & n\equiv (D-1)(\mathrm{mod}D).\end{cases}\tag{12. 2. 1}$$

其中 $D\in$ N，且 $D\geqslant 2$.

其对应的推广的 *Collatz* 问题的提法是：

对任何 $n \in N$，用此函数 $C(n)$ 进行迭代，问是否存在有限的迭代次数 k，使得 $C^k(n) < D$？

当 $D = 2$ 时，(12. 2. 1) 式的函数就是(12. 1. 1) 式的函数，称为**原始的** *Collatz* **函数**，对应的“问题”则称为**原始的** *Collatz* **问题**. 由于从 1 到至少 10^{12} 的自然数获得验证，未发现一个例外，故提出了著名的 $3N + 1$ 猜想.

针对推广的 *Collatz* 问题，也必须先用大量的自然数作试验，在未发现一个反例的情况下才可以提出相对应的推广的 *Collatz* 猜想，即 $KN + 1$ 猜想($K = D + 1 \geqslant 3$). 下面举例讨论看是否有 $4N + 1$ 猜想，$5N + 1$ 猜想等等.

例 1　$4N + 1$ 猜想

当 $D = 3$ 时，(12. 2. 1) 式的函数就是：

$$C(n) = \begin{cases} \frac{n}{3}, & n \equiv 0 \pmod 3, \\ \frac{4n-1}{3}, & n \equiv 1 \pmod 3, \\ \frac{4n+1}{3}, & n \equiv 2 \pmod 3. \end{cases} \qquad (12.\ 2.\ 2)$$

用此函数对自然数 n 进行迭代得到的一些轨迹序列 $T(n)$ 如表 12. 2 所示.

表 12.2　$4N\pm1$猜想所对应的一些轨迹序列 $T(n)$

$T(1)=\{1,1,\cdots\}$,

$T(2)=\{2,3,1,\cdots\}$,

$T(4)=\{4,5,7,9,3,1,\cdots\}$,

$T(6)=\{6,2,3,1,\cdots\}$,

$T(8)=\{8,11,15,5,7,9,3,1,\cdots\}$,

$T(10)=\{10,13,17,23,31,41,55,73,97,129,43,57,19,25,$
$33,11,15,5,7,9,3,1,\cdots\}$,

$T(12)=\{12,4,5,7,9,3,1,\cdots\}$,

$T(14)=\{14,19,25,33,11,15,5,7,9,3,1,\cdots\}$,

$T(16)=\{16,21,7,9,3,1,\cdots\}$,

$T(18)=\{18,6,2,3,1,\cdots\}$,

$T(20)=\{20,27,9,3,1,\cdots\}$,

$T(22)=\{22,29,39,13,17,23,31,41,55,73,97,129,43,57,$
$19,25,33,11,15,5,7,9,3,1,\cdots\}$,

$T(24)=\{24,8,11,15,5,7,9,3,1,\cdots\}$,

$T(26)=\{26,35,47,63,21,7,9,3,1,\cdots\}$,

$T(27)=\{27,9,3,1,\cdots\}$,

$T(28)=\{28,37,49,65,87,29,39,13,17,23,31,41,55,73,97,$
$129,43,57,19,25,33,11,15,5,7,9,3,1,\cdots\}$,

$T(30)=\{30,10,13,17,23,31,41,55,73,97,129,43,57,19,$
$25,33,11,15,5,7,9,3,1,\cdots\}$,

$T(32)=\{32,43,57,19,25,33,11,15,5,7,9,3,1,\cdots\}$,

$T(34)=\{34,45,15,5,7,9,3,1,\cdots\}$,

$T(36)=\{36,12,4,5,7,9,3,1,\cdots\}$,

…

试验发现：至少直到 5×10^6 的自然数，每个的轨迹序列总存在小于 3 的元素，且未发现一个反例. 据此可提出以下的 $4N+1$ **猜想**：

对每个 $n\in N$，用(12. 2. 2)式的函数 $C(n)$ 进行迭代，必存在有限的迭代次数 k，使得 $C^k(n)<3$.

例 2　$5N+1$ 猜想

当 $D=4$ 时，(12. 2. 1)式的函数就是：

$$C(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{4},\ n\equiv0(\mathrm{mod}4),\\ \dfrac{5n-1}{4},\ n\equiv1(\mathrm{mod}4),\\ \dfrac{5n-2}{4},\ n\equiv2(\mathrm{mod}4),\\ \dfrac{5n+1}{4},\ n\equiv3(\mathrm{mod}4).\end{cases}\qquad(12.\ 2.\ 3)$$

依据此函数所得到的轨迹序列如：

$T(1)=\{1,1,1,\cdots\}$,

$T(2)=\{2,2,2,\cdots\}$,

$T(3)=\{3,4,1,1,\cdots\}$,

$T(5)=\{5,6,7,9,11,14,17,21,26,32,8,2,2,\cdots\}$,

$T(10)=\{10,12,3,4,1,1,\cdots\}$,

$T(13)=\{13,16,4,1,1,\cdots\}$,

…

试验发现：至少直到 10^5 的自然数，每个的轨迹序列总存在小于 4 的元素，且未发现一个反例. 故可以提出 $5N+1$ **猜想**：

对每个 $n\in \mathrm{N}$，用(12. 2. 3)式的函数 $C(\mathrm{n})$ 进行迭代，必存在有限的迭代次数 k，使得 $\mathrm{C^k(n)}<4$.

例 3　$6\mathrm{N}+1$ 猜想

当 $\mathrm{D}=5$ 时，(12. 2. 1)式的函数就是：

$$C(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{5}, & n\equiv 0(\mathrm{mod}5),\\ \dfrac{6n-1}{5}, & n\equiv 1(\mathrm{mod}5),\\ \dfrac{6n-2}{5}, & n\equiv 2(\mathrm{mod}5),\\ \dfrac{6n-3}{5}, & n\equiv 3(\mathrm{mod}5),\\ \dfrac{6n+1}{5}, & n\equiv 4(\mathrm{mod}5).\end{cases}\qquad(12.2.4)$$

依据此函数所得到的轨迹序列如：

$C(1)=\{1,1,1,\cdots\}$,

$C(2)=\{2,2,2,\cdots\}$,

$C(3)=\{3,3,3,\cdots\}$,

$C(4)=\{4,5,1,1,\cdots\}$,

$C(6)=\{6,7,8,9,11,13,15,3,3,\cdots\}$,

$C(10)=\{10,2,2,\cdots\}$,

$C(12)=\{12,14,17,20,4,5,1,1,\cdots\}$,

…

可以提出 $6N+1$ 猜想：

对每个 $n\in\mathbf{N}$，用(12.2.4)式的函数 C(n) 进行迭代，必存在有限的迭代次数 k，使得 $C^k(n)<5$.

验证表明，此猜想对至少直到 10^5 的自然数成立，未发现一个反例.

还可以继续讨论 $7N+1$ 猜想、$8N+1$ 猜想等等. 表 12.3 列出了一些 $KN+1$ 猜想及其已知的成立范围.

表 12.3 $KN+1$ 猜想

猜想名称	已验证的自然数 n 的范围
$3N+1$	$\leqslant 10^{12}$
$4N+1$	$\leqslant 5\times 10^{6}$
$5N+1$	$\leqslant 10^{5}$
$6N+1$	$\leqslant 10^{5}$
$7N+1$	$\leqslant 10^{5}$
$8N+1$	$\leqslant 10^{5}$
$9N+1$	$\leqslant 10^{5}$
$10N+1$	$\leqslant 10^{5}$
$11N+1$	$\leqslant 3\times 10^{4}$
$12N+1$	$\leqslant 3\times 10^{4}$
$13N+1$	$\leqslant 3\times 10^{4}$
…	

12.3 推广的 $C(n)$ 函数的第二种标准形式

推广的 $C(n)$ 函数的第二种标准形式是：

$$C(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{D}, & n\equiv 0(\bmod D),\\ \dfrac{(D+1)n-1}{D}, & n\equiv 1(\bmod D),\\ \dfrac{(D+1)n+(D-2)}{D}, & n\equiv 2(\bmod D),\\ \qquad\cdots & \\ \dfrac{(D+1)n+2}{D}, & n\equiv (D-2)(\bmod D),\\ \dfrac{(D+1)n+1}{D}, & n\equiv (D-1)(\bmod D).\end{cases} \tag{12.3.1}$$

其中 $D\in\mathbf{N}$，且 $D\geqslant 2$.

其对应的推广的 *Collatz* 问题的提法是：

对任何 $n \in N$，用此函数 $C(n)$ 进行迭代，问是否存在有限的迭代次数 k，使得 $C^k(n) < D$？

针对此推广的 *Collatz* 问题，必须用大量的自然数作试验，在未发现一个反例的情况下就可以提出相对应的推广的 *Collatz* 猜想，称为 $(D+1)N-1$ 猜想.

$3N+1$ 猜想比较特殊，它所涉及的 *Collatz* 函数(12. 1. 1)既可以看作(12. 2. 1)式的 $C(n)$ 当 $D=2$ 时的情形也可以看作(12. 3. 1)的 $C(n)$ 当 $D=2$ 时的情形.

例 4　$3N-1$ 猜想不成立

当 $D=2$ 时，(12. 3. 1)式的函数为

$$C(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2}, & n\equiv 0 \pmod 2,\\[2mm] \dfrac{3n-1}{2}, & n\equiv 1 \pmod 2.\end{cases} \qquad (12.\ 3.\ 2)$$

此函数也可以看作当 $D=2$ 时(12. 2. 1)式的函数 $C(n)$. 依据此函数所得到的轨迹序列如：

$T(1)=\{1,1,1,\cdots\}$,

$T(2)=\{2,1,\cdots\}$,

$T(3)=\{3,4,2,1,\cdots\}$,

$T(5)=\{5,7,10,5,\cdots\}$,

$T(9)=\{9,13,19,28,14,7,10,5,7,\cdots\}$,

$T(11)=\{11,16,8,4,2,1,\cdots\}$,

$T(17)=\{17,25,37,55,82,41,61,91,136,68,34,17,\cdots\}$,

…

发现两个圈(5，7，10，5)和(17，25，37，…，17). 因此，$3N-1$ 猜想是不成立的.

例 5　$4N-1$ 猜想

当 $D=3$ 时，(12. 3. 1)式的 $C(n)$ 和(12. 2. 1)式的 $C(n)$

相同，即(12. 2. 2)式的 $C(n)$. 因此 $4N-1$ 猜想也就是 $4N+1$ 猜想，两猜想可统称为 **$4N\pm1$ 猜想**. 其对应的一些自然数 n 的轨迹序列 $T(n)$ 如表 12. 2 所示.

例 6　$5N-1$ 猜想不成立

当 $D=4$ 时，(12. 3. 1) 式的函数为

$$C(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{4},\ n\equiv 0\ (\mathrm{mod}4),\\[2mm] \dfrac{5n-1}{4},\ n\equiv 1\ (\mathrm{mod}4),\\[2mm] \dfrac{5n+2}{4},\ n\equiv 2\ (\mathrm{mod}4),\\[2mm] \dfrac{5n+1}{4},\ n\equiv 3\ (\mathrm{mod}4).\end{cases}\qquad(12.\ 3.\ 3)$$

依据此函数所得到的轨迹序列如：

$T(1)=\{1,1,\cdots\}$,

$T(2)=\{2,3,4,1,\cdots\}$,

$T(5)=\{5,6,8,2,3,4,1,\cdots\}$,

$T(7)=\{7,9,11,14,18,23,29,36,9,\cdots\}$,

$T(10)=\{10,13,16,4,1,\cdots\}$,

…

发现一个圈(9，11，14，18，23，29，36，9). 故 $5N-1$ 猜想不成立.

可以继续讨论 $6N-1$ 猜想，$7N-1$ 猜想等等. 研究的结果发现有的可提出 **$KN-1$** 猜想，有的则猜想不成立. 表 12. 4 列出了部分研究结果.

表 12.4 $KN-1$ 猜想

猜想名称	已验证的自然数 n 的范围或猜想不成立	备　　注
$3N-1$	猜想不成立	有圈(5，7，10，5)和(17，25，…，17)
$4N-1$	$\leqslant 5\times10^6$	与 $4N+1$ 猜想同
$5N-1$	猜想不成立	有圈(9，11，…，9)
$6N-1$	猜想不成立	有圈(36，43，…，36)
$7N-1$	$\leqslant 10^5$	
$8N-1$	猜想不成立	有圈(8，9，…，8)
$9N-1$	$\leqslant 10^5$	
$10N-1$	$\leqslant 10^4$	
$11N-1$	$\leqslant 10^4$	
$12N-1$	猜想不成立	有圈(12，13，…，12)
$13N-1$	猜想不成立	有圈(351，381，…，351)
…		

表 12.3 似乎表明对所有的自然数 $K\geqslant 3$ 可以提出 $KN+1$ 猜想，而表 12.4 已经表明只是对某些 $K\geqslant 3$ 可以提出 $KN-1$ 猜想，这都是令人感到奇妙的．理论上两张表都可以无限地继续造下去，但实际上不可能，因为随着 K 的不断增大，$C(n)$ 的表达式会越来越长，计算量也会越来越大，结果势必导致最现代的计算机也无法在较大的数值范围内验证有关猜想是否成立的地步，而研究者也就会因无可奈何而罢休，这是可以预见的“悲哀”！

尾　声

如果本书在上一段话结束，许多读者可能会顿感沮丧，失去对研究 $3N+1$ 猜想的信心，并情不自禁地向我发问：$3N+1$ 猜想尚未解决，又冒出这不计其数的新猜想，这不是叫人钻“无底洞”吗？我的回答是，诚然，$3N+1$ 猜想同哥德巴赫猜想一样，目前呈现在人们眼前的仍是迷雾重重，看不出很快就会被破解的迹象。但随着人们不断深入研究的积累，必然会产生从量变到质变的飞跃而最终尘埃落定。我相信这一时刻的到来不会是遥遥无期的。如果解决了 $3N+1$ 猜想之谜，则表 12．3 和表 12．4 中所列的诸多 $KN\pm1$ 猜想有迎刃而解的可能。这是为什么呢？第一，正如在第 12．2 段的讨论中已指出的，$3N+1$ 猜想所涉及的(12．1．1)式的函数 $C(n)$ 既可看作(12．2．1)式的标准函数的特殊情形，也可以看作(12．3．1)式的标准函数的特殊情形，因此 $3N+1$ 猜想可以列在表 12．3 之首，也可以列在表 12．4 之首，换言之，两表中的诸多 $KN\pm1$ 猜想必存在着现在还未揭示的内在联系，而 $3N+1$ 猜想是所有这些猜想的“领头羊”。第二，君不见在数学证明的手段中，有一个众所周知的“数学归纳法”吗？一个与自然数有关的命题本来需要无穷多次验证才能被证明，但若采用“数学归纳法”，无穷多次地验证被巧妙地转化为两步来完成，足见此法的威力之大！于是我设想：诸多 $KN\pm1$ 猜想将来能否用“归纳法”证明其成立与否呢？如果将来某一天 $3N+1$ 猜想被证明成立（或不成立），则利用此结果作为用“归纳法”证明其它诸多 $KN\pm1$ 猜想成立与否的第一步便是理所当然的了。如果能用“归纳法”解决表 12．3 和表 12．4 的所有猜想（这并非异想天开），则上段末句所说的“悲哀”便化为乌有！我坚信：道路是曲折的，前途是光明

的！

依上述，在诸多 $KN \pm 1$ 猜想中还是 $3N + 1$ 猜想最简单、最迷人、最富挑战性. 诸多 $KN \pm 1$ 猜想并不可怕，首要的是必须攻克 $3N + 1$ 猜想，以完成用“归纳法”（或用别的什么方法）证明其它猜想成立与否的第一步.

诚然要攻克 $3N + 1$ 猜想、哥德巴赫猜想之类的难题，正如权威的数学家们所说的在目前数学还没有准备好. 按我的理解，这里所说的数学还没有准备好主要是指目前纯数学和基础数理论研究的发展还没有达到足以解决此类问题的高度. 这正说明目前大力发展纯数学和基础数学理论研究的必要性、重要性和紧迫性. 否则如果只依靠计算机去验证猜想或试图找出反例是远远不够的.

青年学生朋友们：中国是数学的故乡. 热爱数学吧，投身到纯数学和基础数学的理论研究之中去吧！那里同样可以施展才华，享受无穷乐趣，实现人生价值. 在这方面陈景润同志给我们大家做出了光辉的榜样，我们要好好向他学习.

最后我用下面四句话结束全书：

“射人先射马，擒贼先擒王.” 欲克 $KN \pm 1$ 猜想，先宰 $3N + 1$ 领头羊！

参考文献

1 Lagarias J C. The $3x+1$ Problem and Its Generalizations. Amer. Math. Monthly, 1985, (92):3~23.

2 Garner L E. On the Height in the Collatz $3n+1$ Problem. Discrete Math. , 1985, (55):57~64.

3 Hayes B. Computer Recreations: On the Ups and Downs of Hailstone Numbers. Scientific American, 1984, 250(1):10~16.

4 GuoGang G. Note On Consecutive Numbers of the Same Height in the Collatz Problem. Discrete Math. , 1993, (112): 261~267.

5 邬家邦. Collatz 问题中同高连续数所占比例的变化趋势. 华中理工大学学报, 1992, 20(5): 171~174.

6 邬家邦. 关于 Collatz 问题中的同高连续正整数. 应用数学, 1993, Vol. 6, 增刊:150~153.

7 邬家邦. Collatz 问题中可合并数对的单调性. 华中理工大学学报, 1995, 170~172.

8 Terras R. A Stopping Time Problem on the Positive Integers. Acta Arith. , 1976, (30): 241~252.

9 Everett C J. Iteration of the Number-Theoretic Function $f(2n)=n$, $f(2n+1)=3n+2$. Advances in Math. , 1977, (25): 42~45.

10 Dolan J M, Gilman A F, and Manickam S. A Generalization of Everett's Result on the Collatz $3x+1$ Problem. Advances in Applied Math. , 1987, (8): 405~409.

11 Garner L E. On the Collatz $3n+1$ Algorithm. Proceedings of the Amer. Math. , Society, 1981, (82): 19~22.

12 Jarvis F. 13, 31 and the $3x+1$ Problem. Eureka (the Journal of the Archimedeans), 1989, (49): 22~25.

13 Crandall R E. On the "$3x+1$" Problem. Math. of Computation. 1978, (32): 1281～1292.

14 Sander J W. On the $(3N+1)$——Conjecture. Acta Arith. , 1990, (55):241～248.

15 Lagarias J C, and Weiss A. The $3n+1$ Problem: Two stochastic Models. The Annals of Applied Probability, 1992, Vol. 2, No. 1, 229～261.

16 ATHREYA, K. B. and NEY, P. E. (1972). Branching Processes. Springer, New York.

17 AZENCOTT, R. and RUGET, G. (1977). Melanges d'équations differentielles et grandes écarts à la loides grandes nombres. Z. Warsch. Verw. Gebiete 38 1—54.

18 BIGGINS, J. D. (1976). The first and last birth problems for a multitype age-dependent branching process. Adv. in Appl. Probab. 8 466—459.

19 BIGGINS, J. D. (1977). Chernoff's theorem in the branching random walk. J. Appl. Probab. 14 630—636.

20 CHERNOFF, H. (1952). A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sums of observations. Ann. Math. Stat. 23 493—507.

21 CRUMP, K. S. and MODE, C. J. (1968). A general age-dependent branching process I. J. Math. Anal. Appl. 24 494—508.

22 CRUMP, K. S. and MODE, C. J. (1969a). A general age-dependent branching process II. J. Math. Anal. Appl. 25 8—17.

23 CRUMP, K. S. and MODE, C. J. (1969b). An age-dependent process with correlations among sister cells. J. Appl. Probab. 6 205—210.

24 KINGMAN, J. F. C. (1975). The first birth problem for an age-dependent branching procces. Ann. Probab. 3 790—801.

25 LEAVENS, G. T. (1989). A distributed search program for the 3x+1 problem. Technical Report TR89-22, Dept. Computer Science, Iowa State Univ.

26 LEIGH, G. M. (1986). A Markov process underlying the generalized Syracuse algorithm. Acta Arith. 46 125—143.

27 MATTHEWS, K. R. and WATTS, A. M. (1984). A generalization of Hasse's generalization of the Syracuse algorithm. Acta Arith. 43 167—175.

28 MATTHEWS, K. R. and WATTS, A. M. (1985). A Markov approach to the generalized Syracuse algorithm. Acta Arith. 45 29—42.

29 NEY, P. (1984). Convexity and Large Deviations. Ann. Probab. 12 903—906.

30 RAWSTHORNE, D. A. (1985). Imitation of an iteration. Math. Mag. 58 172—176.

31 ROBERTS, A. W. and VARBERG, D. E. (1973). Convex Functions. Academic, New York.

32 ROCKAFELLAR, R. T. (1970). Convex Analysis. Princeton Univ. Press.

33 TAKACS, L. (1977). Combinatorial Methods in the Theory of Stochastic Processes. Kriegor, Huntington, N. Y.

34 TERRAS, R. (1979). On the existence of a density. Acta Arith. 35 101—102.

35 VYSSOTSKY, V. S. (1987). Private communication.

36 WAGON, S. (1985). The Collatz problem. Match. Intelligencer 7(1) 72—76.

37 WENTZELL, A. D. (1976). Rough limit theorems on large deviations for Markov processes I, II. Theory Probab. Appl. 21 227—242;499—512.

38 Anderson s, and Corvin J. Problem B-546, Fibonacci Quarterly 1986, (24):182—183.

39 Wiggin B C. Wondrous Numbers-Conjecture about the 3n+1 Family. J. Recreational Math. , 1988, 20(1):52—56.